Esercizi di Calcolo delle Probabilità

Foglio 8

David Barbato

Esercizio 1. (06/09/2016)

Siano $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ due successioni di variabili aleatorie congiuntamente indipendenti con $P(X_n = -1) = P(X_n = 0) = P(X_n = 1) = \frac{1}{3}$ e $Y_n \sim \text{Bern}(\frac{1}{n})$ per ogni n . Sia inoltre per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$T_n := X_1 Y_1 + \dots + X_n Y_n$$

- (a) Calcolare la media di T_n .
- (b) La successione $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una martingala?
- (c) Calcolare la funzione caratteristica di T_n .
- (d) La successione $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è tight?

Esercizio 2. (22/09/2016)

Sia $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie (non necessariamente indipendenti) con distribuzione $X_n \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{n})$, sia inoltre $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una submartingala negativa.

- (a) Dimostrare che la successione $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è tight.
- (b) Dimostrare che la successione $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è tight.
- (c) Dimostrare che esiste una sottosuccessione dei numeri naturali $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che posto

$$Z_k = (X_{n_k} + Y_{n_k})^2$$

si abbia $\{Z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge in distribuzione.

Esercizio 3. (22/09/2016)

Sia $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie, siano $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{\mathcal{G}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ due filtrazioni tali che per ogni n valga $\sigma(X_n) \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{G}_n$.

- (a) È vero che se $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una martingala rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ allora lo è anche rispetto a $\{\mathcal{G}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$?
- (b) È vero che se $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una martingala rispetto a $\{\mathcal{G}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ allora lo è anche rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$?

Fornire una dimostrazione per le affermazioni vere ed un controesempio per quelle false.

Esercizio 4. (22/09/2016)

Sia $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una martingala positiva, sia $k > 0$ e siano definite le seguenti successioni di variabili aleatorie:

$$Y_n := k^{X_n} \quad \text{e} \quad Z_n := (X_n)^k$$

Supponiamo infine che le variabili aleatorie Y_n e Z_n siano in L^1 .

- (a) La successione $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una martingala, una supermartingala oppure una submartingala?
(b) La successione $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una martingala, una supermartingala oppure una submartingala? **Distinguere eventualmente i casi $k > 1$ e $k < 1$.**

Suggerimento. Può essere utile la disuguaglianza di Jensen: Se X è una v.a. $\mathcal{F}$ una filtrazione e φ una funzione convessa allora a patto che X e $\varphi(X)$ siano in L^1 vale la disuguaglianza:

$$\varphi(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)|\mathcal{F}] \quad q.c.$$

Soluzioni (Nelle soluzioni è stato omesso lo svolgimento dei passaggi più semplici)

Esercizio 1. (06/09/2016)

- (a) $\mathbb{E}[T_n] = 0$
(b) Posto $Z_n := X_n \cdot Y_n$ allora $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è somma di variabili aleatorie indipendenti e a media nulla.
(c) $\Phi_{Z_k}(t) = \mathbb{E}[e^{Z_k t i}] = 1 - \frac{2}{3k}(1 - \cos(t))$

$$\Phi_{T_n}(t) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{2}{3k}(1 - \cos(t)) \right)$$

- (d) Supponiamo per assurdo che $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sia Tight allora per il teorema di Prokhorov esiste una sottosuccessione $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che $\{T_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge in distribuzione ad un opportuna v.a. T . Quindi per ogni t si dovrebbe avere: $\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi_{T_{n_k}}(t) = \Phi_T(t)$. Calcoliamo il limite:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{T_{n_k}}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t = 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ma la funzione appena ottenuta non è continua e non può essere funzione caratteristica di una variabile aleatoria.

Esercizio 2. (22/09/2016)

(a) Le v.a. X_n sono nonnegative ed hanno media 1. Consideriamo la disuguaglianza di Markov

$$P(|X_n| > M) \leq \frac{\mathbb{E}[X_n]}{M} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Per ogni $\epsilon > 0$ possiamo porre $M := \frac{1}{\epsilon}$ ed ottenere

$$P(|X_n| > M) \leq \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(b) Poiché $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una sottomartingala si ha $E[Y_n] \geq \mathbb{E}[Y_0]$ e poiché è negativa vale

$$E[|Y_n|] \leq \mathbb{E}[|Y_0|]$$

utilizzando la disuguaglianza di Markov con $M = \frac{\mathbb{E}[|Y_0|]}{\epsilon}$ si ha

$$P(|Y_n| > M) \leq \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(c) Sia

$$T_n := (X_n + Y_n)^2$$

per ogni n . Sia $\epsilon > 0$ fissato per quanto dimostrato nei quesiti precedenti esistono M_1 e M_2 tali che

$$P(|X_n| > M_1) \leq \epsilon/2, \quad P(|Y_n| > M_2) \leq \epsilon/2 \quad \forall n$$

Allora si avrà

$$P((X_n + Y_n)^2 > (M_1 + M_2)^2) \leq \epsilon \quad \forall n$$

dunque $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è tight e per il teorema di Prokhorov esiste una sottosuccessione che converge in distribuzione.

Esercizio 3. (22/09/2016)

(a) No in generale non è vero. Per esempio se $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una martingala rispetto ad $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ non costante (cioè tale che $P(X_n \neq X_{n-1}) > 0$) allora se per ogni n poniamo $\mathcal{G}_n := \mathcal{F}_{n+1}$ si ha che $\{\mathcal{G}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una filtrazione e vale

$$\mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_n] = X_n$$

(b) Si è vero. Bisogna verificare che $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una martingala rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Le prime due proprietà sono banali. Mentre per la terza vale:

$$\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}_{n-1}] | \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1}$$

dove la prima uguaglianza segue dall'ipotesi $\mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{G}_{n-1}$ mentre l'ultima segue dall'ipotesi $\sigma(X_{n-1}) \subseteq \mathcal{F}_{n-1}$

Esercizio 4. (22/09/2016)

(a) Se $k = 1$ allora $Y_n \equiv 1$ ed dunque $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una martingala. Se $k > 0$ e $k \neq 1$ allora posto $\Phi(x) = k^x$ la funzione Φ è convessa applicando la disuguaglianza di Jensen a X_n e $\mathcal{F}_{n-1}$ si ottiene

$$Y_{n-1} \leq \mathbb{E}[Y_n | \mathcal{F}_{n-1}]$$

dunque $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una sottomartingale.

Per verificare che in generale per $k > 0$ e $k \neq 1$, $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ non è anche una supermartingala si può considerare il seguente esempio: $X_0 \equiv 1$, $X_1 \in \{0, 2\}$ con $P(X_1 = 0) = P(X_1 = 2) = 1/2$ e $X_n = X_{n-1}$ per $n \geq 2$. La verifica è immediata.

(b) Lo svolgimento del quesito (b) è simile a quello del quesito (a). L'unica differenza sostanziale è che per $k \in (0, 1)$ la funzione $\Phi(x) = x^k$ è concava (invece che convessa), in questo caso le disuguaglianze risulteranno invertite e per $k \in (0, 1)$ si avrà che $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una supermartingala.