Primo appello di
Calcolo delle probabilità
Laurea Triennale in Matematica
20/01/2020

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA..

Esercizio 1.
Siano $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due famiglie di variabili aleatorie congiuntamente indipendenti su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{H}, P)$. Supponiamo che $P(X_0 = 0) = P(Y_0 = 0) = 1$ e per ogni $n \geq 1$ si abbia $X_n \sim Poisson(n)$ e $Y_n \sim Poisson(\frac{1}{n})$. Sia infine per ogni n

$$Z_n := Y_{X_n}$$

(a) Studiare la convergenza in distribuzione di $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
(b) Studiare la convergenza in probabilità di $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

SOLUZIONE
Osserviamo che $\mathbb{E}[X_n] = VAR[X_n] = n$ il che ci dice che per n grande X_n assumerà con alta probabilità valori grandi. Mentre vale

$$P(Y_k = 0) = e^{-\frac{1}{k}}$$

cosicché $\lim\limits_{k\to\infty} P(Y_k = 0) = 1$. Poiché ci aspettiamo che X_n l'indice di Y_{X_n} cresca e sappiamo che $P(Y_k = 0)$ tende ad 1 allora ha senso provare a dimostrare che Z_n tende a zero.
Sia M fissato, allora per n maggiore di M vale

$$P(X_n < M) = P(n - X_n > n - M) \leq P(|X_n - n| > n - M) \leq \frac{VAR[X_n]}{(n-M)^2}$$

$$P(X_n < M) \leq \frac{n}{(n-M)^2}$$

Quindi

$$\forall M > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P(X_n < M) = 0$$

Per ogni M fissato e $n > M$ vale

$$P(Z_n = 0) = \sum_k P(Z_n = 0, X_n = k) = \sum_k P(Y_k = 0, X_n = k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(Y_k = 0) \cdot P(X_n = k) \geq \sum_{k=M}^{\infty} e^{-\frac{1}{M}} \cdot P(X_n = k)$$

$$P(Z_n = 0) \geq e^{-\frac{1}{M}} \sum_{k=M}^{\infty} \cdot P(X_n = k) = e^{-\frac{1}{M}} P(X_n \geq M)$$

quindi

$$P(Z_n = 0) \geq e^{-\frac{1}{M}}(1 - P(X_n < M)$$

Passando al limite per n che va all'infinito si ottiene

$$\forall M > 0 \qquad \liminf_{n\to\infty} P(Z_n = 0) \geq e^{-\frac{1}{M}}$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n = 0) = 0$$

dunque $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 in distribuzione ed in probabilità.

Esercizio 2.
Costruire, se esiste, un esempio di martingala $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in $\mathbb{Z}$ tale che per ogni $n \geq 1$ si abbia

$$P(\text{“}X_n \text{ è un multiplo di } n\text{”}) = 1$$

SOLUZIONE
L'idea è di costruire una martingala moltiplicativa $X_n := Y_1 \cdot Y_2 \cdot \ldots \cdot Y_n$ con le $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ indipendenti di media 1 e tali che $P(Y_n \in \{n, -n\}) = 1$
Per un risultato visto a lezione, le condizione esposte ($\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ indipendenti di media 1) sono sufficienti affinché $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia una martingala. Chiaramente $P(X_n \in \{n!, -n!\}) = 1$ quindi vale anche la condizione n divide X_n. Resta da verificare che esistano delle variabili Y_n che soddisfano le condizioni:

$$\mathbb{E}[Y_n] = 1 \qquad\qquad P(Y_n \in \{n, -n\}) = 1$$

Dopo semplici passaggi si ottiene $P(Y_n = n) = \frac{n+1}{2n}$ e $P(Y_n = -n) = \frac{n-1}{2n}$

Esercizio 3. Sia $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione $X_n \sim Unif\{-4,-3,-2,-1,+10\}$. Siano inoltre per ogni $n \geq 1$:

$$\mathcal{F}_n := \sigma\{X_1,\dots,X_n\} \qquad S_n := X_1 + \dots + X_n$$
$$\tau := \inf\{n \geq 1 | X_n = 10\} \qquad Y_n := S_{n\wedge\tau}$$

(a) Qual è la distribuzione di τ. Calcolare $\mathbb{E}[\tau]$.
(b) $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala, una sottomartingala o una supermartingala?
(c) Quanto vale $\mathbb{E}[S_\tau]$?

SOLUZIONE
(a) $\tau \sim Geom(p = \frac{1}{5})$, $\mathbb{E}[\tau] = 5$.

(b) Prima di tutto mostriamo che τ è un tempo di arresto:

$$\{\tau = n\} = \{X_1 \neq 10\} \cap \dots \cap \{X_{n-1} \neq 10\} \cap \{X_n = 10\} \in \mathcal{F}_n$$

$\mathbb{E}[X_n] = 0$, quindi S_n è la somma di variabili aleatorie indipendenti a media nulla dunque è una martingala. $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala arrestata quindi è a sua volta una martingala.

(c) Possiamo applicare il teorema opzionale di arresto utilizzando le ipotesi

$$\forall n \quad P(|X_{n+1} - X_n| \leq 10) = 1 \qquad \text{e} \qquad \mathbb{E}[\tau] = 5 < \infty$$

dal quale si ottiene:

$$\mathbb{E}[S_\tau] = \mathbb{E}[S_0] = 0$$

Esercizio 4.
Siano $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due famiglie di variabili aleatorie congiuntamente indipendenti su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{H}, P)$. Supponiamo che per ogni n si abbia $X_n \sim Unif(-n, n)$ e $Y_n \sim esp(n)$. Sia $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la filtrazione definita da:

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$$

Siano infine per ogni n assegnate le seguenti variabili aleatorie

$$\begin{aligned} Z_n &:= X_1Y_1 + \ldots + X_nY_n \\ T_n &:= \mathbb{E}[Z_n|\mathcal{F}_n] \end{aligned}$$

(a) $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala, supermartingala o sottomartingala?

(b) Calcolare media e varianza di T_n.

(c) Cosa si può dire del limite: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{T_n}{n}$?

(d) Cosa si può dire del limite: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{T_n}{\sqrt{n}}$?

(e) Cosa si può dire del limite quasi certo in $\mathbb{R}$ di T_n?

SOLUZIONE
Prima di tutto vediamo come è fatta la variabile aleatoria T_n.

$$\begin{aligned} T_n &:= \mathbb{E}[Z_n|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_1Y_1 + \ldots + X_nY_n|\mathcal{F}_n] \\ T_n &:= X_1\mathbb{E}[Y_1|\mathcal{F}_n] + \ldots + X_n\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_n] \\ T_n &:= X_1\mathbb{E}[Y_1] + \ldots + X_n\mathbb{E}[Y_n] \\ T_n &:= \frac{X_1}{1} + \ldots \frac{X_k}{k} + \ldots + \frac{X_n}{n} \end{aligned}$$

Dove abbiamo utilizzato nell'ordine per $k \leq n$: X_k è $\mathcal{F}_n$ misurabile; Y_k è indipendente da $\mathcal{F}_n$; $\mathbb{E}[Y_k] = \frac{1}{k}$. Sia ora $W_n := \frac{X_n}{n}$ allora si ha:

$$T_n = W_1 + \ldots + W_n$$

con le variabili aleatorie $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d. con distribuzione $W_n \sim Unif(-1, 1)$.
(a) $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è somma di variabili aleatorie indipendenti a media nulla quindi è una martingala.
(b) $\mathbb{E}[T_n] = 0$, $VAR[T_n] = n \cdot VAR[W_1] = \frac{n}{3}$
(c) Poichè le $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono i.i.d. per la legge dei grandi numeri vale:

$$\frac{T_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} \mathbb{E}[W_1] = 0$$

(d) Poichè le $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono i.i.d. per il teorema del limite centrale vale:

$$\frac{T_n - n\mathbb{E}[W_1]}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{distr} N(0, VAR[W_1])$$

quindi

$$\frac{T_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{distr} N\left(0, \frac{1}{3}\right)$$

(e) METODO 1
Se $T_n(\omega)$ converge in $\mathbb{R}$ allora $\lim_n |T_{n+1}(\omega) - T_n(\omega)| = 0$ ovvero $\lim_n |W_n(\omega)| = 0$.
Sappiamo che $W_n \sim Unif(-1,1)$ quindi per esempio vale $P(|W_n| > \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ sommando si ottiene: $\sum_n P(|W_n| > \frac{1}{2}) = +\infty$ per il lemma di Borel Cantelli allora per quasi ogni $\omega \in \Omega$ esistono infiniti n tali che $|W_n(\omega)| > \frac{1}{2}$ quindi la successione $\{T_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$ non può convergere in $\mathbb{R}$.
METODO 2
Sia $M > 0$ e sia $n > \overline{n} > 0$, stimiamo $P(T_n > M)$

$$P(T_n > M) = P\left(\frac{T_n}{\sqrt{\frac{n}{3}}} > \frac{M}{\sqrt{\frac{n}{3}}}\right) > P\left(\frac{T_n}{\sqrt{\frac{n}{3}}} > \frac{M}{\sqrt{\frac{\overline{n}}{3}}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \Phi\left(\frac{M}{\sqrt{\frac{\overline{n}}{3}}}\right)$$

Dove Φ è la funzione di ripartizione della distribuzione normale standard. Poiché la relazione precedente vale per ogni $\overline{n}$ allora si deve avere che per ogni $M > 0$

$$\liminf_n P(T_n > M) \geq \frac{1}{2}$$

allo stesso modo si ricava che per ogni $M > 0$ vale $\liminf_n P(T_n < -M) \geq \frac{1}{2}$ e quindi T_n converge in distribuzione ad una variabile aleatoria T tale che $P(T = +\infty) = P(T = +\infty) = \frac{1}{2}$, quindi non può convergere quasi certamente su $\mathbb{R}$.

Esercizio 5. Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie in L^2 tale che:

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} 0 \qquad \mathbb{E}[X_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

(a) Dimostrare che $Var[X_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

SOLUZIONE

Poiché $VAR[X_n] = \mathbb{E}[X_n^2] - \mathbb{E}[X_n]^2$ e $\mathbb{E}[X_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ allora

$$Var[X_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbb{E}[X_n^2] \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

inoltre la convergenza quasi certa implica la convergenza in probabilità per cui si ha:

$$\forall\varepsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P(X_n > \varepsilon) = 0$$

METODO 1

Siano $0 < \varepsilon < M$ (pensiamo a ε piccolo vicino a zero e M grande.) Dobbiamo mostrare che $\mathbb{E}[X_n^2] \to \infty$

$$\mathbb{E}[X_n^2] \geq \mathbb{E}[X_n^2 \mathbf{1}_{X_n>M}] \geq \mathbb{E}[X_n^2 \mathbf{1}_{X_n>M}] \geq \mathbb{E}[M X_n \mathbf{1}_{X_n>M}]$$
$$\mathbb{E}[X_n^2] \geq M\mathbb{E}\left[X_n \mathbf{1}_{X_n>M}\right]$$

resta da stimare $\mathbb{E}\left[X_n \mathbf{1}_{X_n>M}\right]$ a partire da $\mathbb{E}[X_n]$.

$$\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}\left[X_n \mathbf{1}_{X_n>M}\right] + \mathbb{E}\left[X_n \mathbf{1}_{X_n\in[\varepsilon,M]}\right] + \mathbb{E}\left[X_n \mathbf{1}_{X_n\leq\varepsilon}\right]$$

$$\mathbb{E}\left[X_n \mathbf{1}_{X_n>M}\right] = \mathbb{E}[X_n] - \mathbb{E}\left[X_n \mathbf{1}_{X_n\in[\varepsilon,M]}\right] - \mathbb{E}\left[X_n \mathbf{1}_{X_n\leq\varepsilon}\right]$$
$$\mathbb{E}\left[X_n \mathbf{1}_{X_n>M}\right] \geq \mathbb{E}[X_n] - \mathbb{E}\left[M \mathbf{1}_{X_n\in[\varepsilon,M]}\right] - \mathbb{E}\left[\varepsilon \mathbf{1}_{X_n\leq\varepsilon}\right]$$
$$\mathbb{E}\left[X_n \mathbf{1}_{X_n>M}\right] \geq \mathbb{E}[X_n] - M \cdot P(X_n > \varepsilon) - \varepsilon$$

passando al limite per n che va all'infinito si ottiene che per ogni $0 < \varepsilon < M$ vale:

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n \mathbf{1}_{X_n>M}\right] \geq 1 - \varepsilon$$

quindi per ogni $M > 0$

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n \mathbf{1}_{X_n>M}\right] \geq 1$$

adesso poiché per ogni $M > 0$ vale $\mathbb{E}[X_n^2] \geq M\mathbb{E}\left[X_n \mathbf{1}_{X_n>M}\right]$ allora

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n^2\right] = \infty$$

METODO 2

Sia $\varepsilon \in (0,1)$

$$\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}\left[X_n \mathbf{1}_{X_n > \varepsilon}\right] + \mathbb{E}\left[X_n \mathbf{1}_{X_n \leq \varepsilon}\right]$$

Maggiorando l'ultimo valore atteso con ε si ottiene:

$$\mathbb{E}\left[X_n \mathbf{1}_{X_n > \varepsilon}\right] \geq \mathbb{E}[X_n] - \varepsilon$$

passando al limite in n si ottiene

$$\liminf_{n \to \infty} \mathbb{E}\left[X_n \mathbf{1}_{X_n > \varepsilon}\right] \geq 1 - \varepsilon$$

applicando la disuguaglianza di Holder a $X_n \mathbf{1}_{X_n > \varepsilon}$ si ottiene:

$$\mathbb{E}\left[X_n \mathbf{1}_{X_n > \varepsilon}\right] \leq \left(\mathbb{E}[X_n^2]\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\mathbb{E}[\mathbf{1}_{X_n > \varepsilon}^2]\right)^{\frac{1}{2}}$$

quindi poiché $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{X_n > \varepsilon}^2] = P(X_n > 0)$ allora

$$\left(\mathbb{E}[X_n^2]\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{\mathbb{E}\left[X_n \mathbf{1}_{X_n > \varepsilon}\right]}{\left(P(X_n > \varepsilon)\right)^{\frac{1}{2}}}$$

passando al limite in n si ha che il $\liminf$ del numeratore è maggiore o uguale a $1 - \varepsilon$ mentre il denominatore tende a zero quindi $\lim_n \mathbb{E}[X_n^2] = \infty$

Esercizio 6.
Costruire, se esiste, un esempio di martingala $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in $(-1,1)$ tale che:

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} X$$

con X variabile aleatoria tale che $P(X \in \{-1,1\}) = 1$

SOLUZIONE
L'idea è di costruire una martingala moltiplicativa che soddisfa la condizione: $P\left(X_n \in \{\frac{n}{n+1}, -\frac{n}{n+1}\}\right) = 1$ cosicché per ogni n si abbia $-1 < X_n < 1$.
Sia $X_0 = 0$, sia X_1 tale che $P(X_1 = \frac{1}{2}) = P(X_1 = -\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$,

$$X_n := X_{n-1} \cdot Y_n \qquad \forall n \geq 2$$

Con le $\{Y_n\}_{n\geq 2}$ di media 1 e indipendenti tra di loro e da X_1.
Sia $\mathcal{F}_: = \sigma\{X_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$. Per costruzione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala, occorre però verificare che esistano delle variabili Y_n che soddisfano le condizioni richieste. La condizione $P\left(X_n \in \{\frac{n}{n+1}, -\frac{n}{n+1}\}\right) = 1$ è soddisfa se e solo se per ogni $n \geq 2$ vale

$$\frac{n}{n+1} = \frac{n-1}{n} \cdot |Y_n|$$

da cui si ottiene:

$$P\left(Y_n \in \left\{\frac{n^2}{n^2-1}, -\frac{n^2}{n^2-1}\right\}\right) = 1$$

mettendo a sistema l'equazione precedente con la condizione $\mathbb{E}[Y_n] = 1$ si ottiene la distribuzione: $P\left(Y_n = \frac{n^2}{n^2-1}\right) = 1 - \frac{2}{n^2}$ e $P\left(Y_n = -\frac{n^2}{n^2-1}\right) = \frac{2}{n^2}$. La distribuzione appena ottenuta soddisfa tutte le richieste fatte finora, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martigala contenuta in $(-1,1)$ e vale $|X_n| \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} 1$.
Occorre solo mostrare che $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge. (Per chiarezza: Le martingale limitate sono sempre quasi certamente convergenti, con ciò la dimostrazione sarebbe conclusa ma poiché questo risultato non è stato visto a lezione procederemo diversamente.)
$P\left(Y_n \neq \frac{n^2}{n^2-1}\right) = \frac{2}{n^2}$ sommando in n

$$\sum_n P\left(Y_n \neq \frac{n^2}{n^2-1}\right) < \infty$$

Per il lemma di Borel Cantelli per quasi ogni ω esiste $\overline{n}$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}$ si ha $Y_n(\omega) = \frac{n^2}{n^2-1}$ quindi

$$\lim_n X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & X_{\overline{n}}(\omega) > 0 \\ -1 & X_{\overline{n}}(\omega) < 0 \end{cases}$$