Esercizi di Calcolo delle Probabilità
Foglio 1
Misurabilità

David Barbato

Esercizio 1. *Dimostrare che se una σ-algebra è finita allora la sua cardinalità è 2^n per qualche $n \in \mathbb{N}$.*

Esercizio 2. *Siano $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ due σ-algebre. Mostrare che $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ è una σ-algebra se e solo se $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$ oppure $\mathcal{A}_1 \supseteq \mathcal{A}_2$.*

Esercizio 3. *Dimostrare che se $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un'applicazione continua allora è anche misurabile come applicazione da $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ in $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.*

Esercizio 4. *Consideriamo i seguenti insiemi:*

$$\begin{cases} \mathcal{A}_1 := \{\ (-\infty, a]\ | a \in \mathbb{R}\} \\ \mathcal{A}_2 := \{\ (a, b]\ | a, b \in \mathbb{R}\} \\ \mathcal{A}_3 := \{\ (a_1, b_1] \bigcup \ldots \bigcup (a_n, b_n]\ | n \in \mathbb{N}, a_1, b_1 \ldots a_n, b_n \in \overline{R}\} \end{cases}$$

Dimostrare che:

$$\sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma(\mathcal{A}_2) = \sigma(\mathcal{A}_3) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Esercizio 5. *Siano $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ appplicazioni misurabili da uno spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{H})$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ dimostrare che sono misurabili le seguenti applicazioni:*

1. $\sup_n X_n$
2. $\inf_n X_n$
3. $\limsup_n X_n$
4. $\liminf_n X_n$

dove $\limsup_n X_n := \inf_n \{\sup_{m>n} X_m\} = \lim_n \{\sup_{m>n} X_m\}$
e $\liminf_n X_n := \sup_n \{\inf_{m>n} X_m\} = \lim_n \{\inf_{m>n} X_m\}$

Esercizio 6. *Sia* Ω *un insieme e sia* $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ *consideriamo le seguenti ipotesi su* $\mathcal{G}$*:*

(i) $\Omega \in \mathcal{G}$

(ii) Se $A \in \mathcal{G}$ *allora* $A^c \in \mathcal{G}$

(iii) Se $A_n \in \mathcal{G}$ *e* $A_n \cap A_m = \emptyset$ *per ogni* $n \neq m$ *allora* $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{G}$

(a) $\Omega \in \mathcal{G}$

(b) Se $A, B \in \mathcal{G}$ *e* $A \subseteq B$ *allora* $B/A \in \mathcal{G}$

(c) Se $A_n \in \mathcal{G}$ *e* $A_n \uparrow A$ *allora* $A \in \mathcal{G}$

Dimostrare che le ipotesi (i), (ii) e (iii) implicano le ipotesi (a), (b) e (c) e viceversa le ipotesi (a), (b) e (c) implicano le ipotesi (i), (ii) e (iii).

Esercizio 7. *Sia* Ω *un insieme con cardinalità pari e maggiore di 2. Consideriamo la seguente collezione di sottoinsiemi di* Ω *:*

$$\mathcal{A} := \{B \in \mathcal{P}(\Omega) | \sharp(B) \text{ pari } \}$$

dimostrare che $\mathcal{A}$ *è un d-system ma non è una* σ*-algebra.*

Esercizio 8. *Mostrare che se* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *è una successione crescente di eventi allora:*

$$\limsup A_n = \liminf A_n = \lim A_n = \cup A_n$$

Esercizio 9. *Sia* $\mathcal{C}$ *la collezione di sottoinsiemi di* $\mathbb{R}$ *data da:*

$$\mathcal{C} := \{(-a, a) : a > 0\}$$

e sia $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$.
(a) Dimostrare che se A *appartiene ad* $\mathcal{A}$ *allora* A *è un boreliano e vale* $A = -A$ *dove* $-A := \{x : -x \in A\}$.
*(b)** Dimostrare che se* A *è un boreliano e vale* $A = -A$ *allora* A *appartiene ad* $\mathcal{A}$.

Esercizio 10. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile in ogni* $x \in \mathbb{R}$*. Mostrare che* f' *è misurabile. (Notare che* f *derivabile non vuol dire che ha derivata continua.)*

Esercizio 11. *Sia* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di variabili aleatorie, sia* $\mathcal{T}_n$ *la sigma algebra generata da* $(X_k)_{k\geq n}$ *e sia* $\mathcal{T} = \cap_n \mathcal{T}_n$ *la sigma algebra coda. Dimostrare che:*
(a) $\limsup_n X_n$ *è* $\mathcal{T}$ *misurabile.*
(b) $\liminf_n X_n$ *è* $\mathcal{T}$ *misurabile.*
(c) $\limsup_n \frac{X_n}{n}$ *è* $\mathcal{T}$ *misurabile.*
(d) $\limsup_n \frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$ *è* $\mathcal{T}$ *misurabile.*
(e) Supponiamo ora $X_n(\omega) \geq 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\omega \in \Omega$ *mostrare che* $\limsup_n \frac{\max\{X_1,\ldots,X_n\}}{n}$ *è* $\mathcal{T}$ *misurabile.*
(f) Cosa si può dire di $\limsup_n \max\{X_1,\ldots,X_n\}$*? Costruire un esempio tale che il limite precedente non è* $\mathcal{T}$ *misurabile e vale* $X_n(\omega) \geq 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\omega \in \Omega$.

Esercizio 12. *Dimostrare che vale:*

$$\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right) = \mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right) \bigotimes \mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$$

Esercizio 13. *(***) Sia* $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ *una famiglia di spazi metrici completi e separabili, sia* $\{\mathcal{T}_i\}_{i\in I}$ *la famiglia delle corrispondenti topologie e supponiamo infine che l'insieme degli indici* I *sia al più numerabile. Dimostrare che posto* $\Omega = \times_{i\in I} \Omega_i$ *e* $\mathcal{T} = \otimes_{i\in I} \mathcal{T}_i$ *allora vale*

$$\mathcal{B}\left(\Omega\right) = \bigotimes_{i\in I} \mathcal{B}(\Omega_i) \tag{1}$$

dove $\mathcal{B}(\Omega)$ *e* $\mathcal{B}(\Omega_i)$ *indicano la* σ*-algebra dei boreliani ovvero* $\mathcal{B}(\Omega) := \sigma(\mathcal{T})$ *e* $\mathcal{B}(\Omega_i) = \sigma(\mathcal{T}_i)$.