

Esercizi di Calcolo delle Probabilità

Foglio 2

σ -algebra e probabilità

David Barbato

Negli esercizi che seguono si utilizzerà la convenzione $A = \lim A_n$ se e solo se $1_A = \lim 1_{A_n}$, ed in maniera analoga per $\limsup$ e $\liminf$.

Esercizio 1. *Mostrare che se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di eventi tali che $\limsup A_n = \liminf A_n$ allora*

$$\lim P(A_n) = P(\lim A_n)$$

Esercizio 2. *Data una successione di eventi $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$*
(a) Dimostrare che

$$P(\liminf A_n) \leq \liminf P(A_n) \leq \limsup P(A_n) \leq P(\limsup(A_n)) \quad (1)$$

(b) Trovare un esempio in cui tutte e tre le disuguaglianze della disequazione (1) sono strette.

Esercizio 3. *(*) Sia $(\Omega, \mathcal{H}, P)$ uno spazio di probabilità e sia $\mathcal{A}$ un'algebra tale che $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$. Dimostrare che per ogni $H \in \mathcal{H}$ e $\epsilon > 0$ esiste $A \in \mathcal{A}$ tale che $P(H \triangle A) < \epsilon$.*

Esercizio 4. *Sia $(\Omega, \mathcal{H}, P)$ uno spazio di probabilità e sia $\mathcal{A}$ la collezione di eventi:*

$$\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{H} | P(A) \in \{0, 1\}\}$$

dimostrare che $\mathcal{A}$ è una σ -algebra

Esercizio 5. *Sia Ω un insieme più che numerabile e sia $\mathcal{A}$ la collezione di sottoinsiemi di Ω data da:*

$$\mathcal{A} := \{A \in \Omega | A \text{ oppure } A^c \text{ è finito o numerabile}\}$$

(a) Dimostrare che $\mathcal{A}$ è una σ -algebra e la seguente funzione P è una misura di probabilità su $(\Omega, \mathcal{A})$.

$$P(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } A \text{ è finito o numerabile} \\ 1 & \text{se } A^c \text{ è finito o numerabile} \end{cases}$$

(b) A cosa serve l'ipotesi Ω è più che numerabile? Può essere rimossa?

Esercizio 6. Sia $(\Omega, \mathcal{H}, \mu)$ è uno spazio di misura, e sia P una proposizione su $\Omega \times E$. Dimostrare che se E è un insieme numerabile (di solito $E = \mathbb{N}$) sono cose equivalenti:

- per quasi ogni $\omega \in \Omega$, per ogni $n \in \mathbb{E}$ vale $P(\omega, n)$
- per ogni $n \in \mathbb{E}$, per quasi ogni $\omega \in \Omega$ vale $P(\omega, n)$

Trovare un controesempio nel caso in cui sia rimossa l'ipotesi E al più numerabile.

Esercizio 7. Costruire un esempio di spazio di probabilità con tre eventi A , B e C tali che siano a due a due indipendenti ma non siano indipendenti in generale (ovvero $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$).

SOLUZIONI

Esercizi 3

Prima di tutto osserviamo che l'applicazione $d : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$ che manda A e B in $P(A \triangle B)$ è una pseudodistanza ovvero

- $d(A, A) = 0$
- $d(A, B) = d(B, A)$
- $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$

Dove l'ultima proprietà è una conseguenza dell'inclusione:

$$(A \triangle B) \cup (B \triangle C) \supseteq (A \triangle C)$$

Dobbiamo mostrare per tutti gli elementi di $\mathcal{H}$ si possono approssimare con elementi di $\mathcal{A}$. Indichiamo con $\mathcal{G}$ la collezione degli insiemi che soddisfano tale proprietà:

$$\mathcal{G} := \{B \in \mathcal{H} | \forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathcal{A} \text{ tale che } P(A \triangle B) < \varepsilon\}$$

è chiaro che $\mathcal{G}$ contiene $\mathcal{A}$ poiché $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{A})$ e $\mathcal{A}$ è un p-system allora per il lemma di Dynkin basta mostrare che $\mathcal{G}$ è un d-system.

Dimostrare che $\mathcal{G}$ contiene Ω ed è chiuso rispetto al complementare è banale. Resta da dimostrare che $\mathcal{G}$ è chiuso rispetto all'unione numerabile di insiemi disgiunti. Dimostreremo dapprima la chiusura finita e poi quella numerabile. Siano B_1, B_2 due elementi disgiunti di $\mathcal{G}$, quindi vale:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A_1, A_2 \in \mathcal{A} \text{ tali che } P(A_1 \triangle B_1) < \varepsilon \quad \text{e} \quad P(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon$$

Sia ora $B = B_1 \cup B_2$ e $A = A_1 \cup A_2$ e dall'inclusione $((A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2)) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$ si ottiene:

$$P(A \triangle B) < 2\varepsilon$$

A questo punto utilizziamo la chiusura finita per dimostrare la chiusura numerabile. Siano $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ elementi disgiunti di $\mathcal{G}$. Siano $B = \bigcup_n B_n$ e $C_n := B_1 \cup \dots \cup B_n$. Poiché $\mathcal{G}$ è chiuso rispetto all'unione finita gli elementi C_n appartengono a $\mathcal{G}$. Inoltre sappiamo che $C_n \uparrow B$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n e $A_n \in \mathcal{A}$ tali che

$$P(C_n \Delta B) < \varepsilon \quad P(A_n \Delta C_n) < \varepsilon$$

da cui si deduce:

$$P(A_n \Delta B) < 2\varepsilon$$