Esercizi di Calcolo delle Probabilità
Foglio 3
Esercizi di riepilogo

David Barbato

I seguenti esercizi sono un utile ripasso di quanto visto durante il corso di probabilità del primo anno.

Esercizio 1. ***Distribuzione esponenziale*** $X \sim Esp(\lambda)$
Sia $\lambda > 0$ e sia X una variabile aleatoria assolutamente continua con densità f

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & se\ 0 < x \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

a) Verificare che f sia effettivamente una funzione di densità di una v.a.
b) Calcolare la funzione di ripartizione F_X.
c) Calcolare media e varianza di X.

Esercizio 2. ***Distribuzione esponenziale*** $X \sim Unif(a, b)$
Siano a e b due numeri con $a < b$ X una variabile aleatoria assolutamente continua con densità f

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & se\ a < x < b \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

a) Verificare che f sia effettivamente una funzione di densità di una v.a.
b) Calcolare la funzione di ripartizione F_X.
c) Calcolare media e varianza di X.
d) Siano c, d due numeri diversi da zero e sia $Y := cX + d$. Dimostrare che Y è ancora una variabile aleatoria uniforme e calcolarne i parametri.

Esercizio 3. *Date due variabili aleatorie X e Y indipendenti che ammettono varianza finita dimostrare che vale:*

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

Mostrare con un controesempio che l'ipotesi 'indipendenti' non può essere rimossa.

Esercizio 4. ***Distribuzione binomiali*** $Y \sim Bin(n,p)$

Sia $n \geq 1$ intero e $p \in [0,1]$. Siano $X_1,\ X_2 \dots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti con distribuzioni bernoulliana di parametro p ovvero tali che $P(X_k = 1) = p$ e $P(X_k = 0) = 1 - p$. Sia $Y := X_1 + \dots + X_n$.

a) Calcolare media e varianza di X_n.

b) Calcolare media e varianza di Y

Esercizio 5. *Siano X, Y e Z tre variabili aleatorie indipendenti con distribuzioni:*

$$X \sim Bin\left(3, \frac{1}{2}\right) \qquad Y \sim esp(\lambda = 2) \qquad Z \sim Bern\left(\frac{1}{3}\right)$$

Siano inoltre assegnate le variabili:

$$T := X \cdot Y \cdot Z \qquad W = \min\{Y, Z\}$$

(a) Calcolare media e varianza della variabile aleatoria T.

(b) Calcolare $P(W = 1)$.

(c) Calcolare la funzione di ripartizione della variabile aleatoria W.

(d) Calcolare $P(W < Z)$.

Esercizio 6. *Sia X una variabile aleatoria tale che:*

$$\mathbb{E}[X] = 1 \qquad \mathbb{E}[X^2] = 2 \qquad \mathbb{E}[X^4] = 4$$

Quanto vale $\mathbb{E}[X^3]$?

Problema 1.
Francesco e Marco giocano a dadi. Con due dadi equilibrati. Ciascuno lancia un dado e vince un euro chi ottiene il risultato maggiore. Per evitare pareggi decidono di modificare un minimo le regole. In casi di esiti uguali vince Marco. A Francesco per bilanciare il gioco viene data la possibilità, se vuole, di rilanciare il suo dado. Sia chiaro, Francesco può decidere di rilanciare il suo dado al più una volta e deve farlo prima di conoscere l'esito del lancio di Marco.
Qual è la strategia ottimale che deve seguire Francesco per ottimizzare la sua probabilità di vittoria?
Voi chi preferireste essere, Francesco o Marco?

Problema 2.
Francesco e Marco giocano a dadi. Con due dadi equilibrati. Ciascuno lancia un dado e vince un euro chi ottiene il risultato maggiore. Per evitare pareggi decidono di modificare un minimo le regole. In casi di esiti uguali vince Marco. Mentre a Francesco per bilanciare il gioco viene data la possibilità, se vuole, di raddoppiare la posta. La decisione di raddoppiare la posta deve avvenire dopo aver visto l'esito del proprio dado ma prima di conoscere l'esito del lancio di Marco.
Qual è la strategia ottimale che deve seguire Francesco per ottimizzare la sua vincita media?
Voi chi preferireste essere, Francesco o Marco?

Problema 3. *****
Francesco e Marco giocano a dadi. Con due dadi equilibrati. Ciascuno lancia un dado e vince un euro chi ottiene il risultato maggiore. Per rendere il gioco più divertente decidono di modificare un minimo le regole. Francesco dopo aver visto l'esito del suo lancio ma prima di conoscere l'esito del lancio di Marco può se vuole decidere di rilanciare una volta il suo dado . Mentre Marco dopo aver visto l'esito del suo lancio ma prima di conoscere l'esito del lancio di Francesco può se vuole decidere di raddoppiare la posta. Supponiamo che ciascuno giocatore debba decidere senza sapere quale sarà la decisione dell'avversario.
Entrambi i giocatori vogliono ottimizzare la propria vincita media.
Voi chi preferireste essere, Francesco o Marco?