

Esercizi di Calcolo delle Probabilità

Foglio 4

David Barbato

Esercizio 1. Sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione $\text{Exp}(1)$ cioè con funzione di ripartizione $F(x) = (1 - e^{-x})\mathbf{1}_{[0, \infty)(x)}$. Sia

$$Y_n := \frac{X_n}{\log(n)} \quad \text{per ogni } n > 1$$

- (a) Calcolare la funzione di ripartizione F_{Y_n} .
- (b) Studiare la convergenza in distribuzione di $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
- (c) Studiare la convergenza in probabilità di $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
- (d) Studiare la convergenza quasi certa di $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. (**Sugg:** calcolare la **probabilità** $P(Y_n > t)$)
- (e) Studiare la convergenza in L^p di $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Esercizio 2. Sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione $\text{Exp}(1)$ cioè con funzione di ripartizione $F(x) = (1 - e^{-x})\mathbf{1}_{[0, \infty)(x)}$. Sia

$$Y_n := \frac{\max\{X_1, \dots, X_n\}}{\log(n)} \quad \text{per ogni } n > 1$$

- (a) Calcolare la funzione di ripartizione F_{Y_n} .
- (b) Studiare la convergenza in distribuzione di $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
- (c) Studiare la convergenza in probabilità di $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
- (d)** Studiare la convergenza quasi certa di $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. (**Sugg:** calcolare la **probabilità** $P(\frac{X_n}{\log(n)} > 1 + \epsilon)$)

Esercizio 3. Sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti tali che per ogni n si abbia $\mathbb{E}[X_n] = -1$ e $P(X_n \in \{1, -n^2\}) = 1$. Sia infine

$$S_n := X_1 + \dots + X_n \quad \text{per ogni } n > 1$$

- (a) Calcolare la funzione di densità discreta di X_n .
- (b) Studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità e quasi certa di $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria quasi certamente positiva mostrare che vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) \leq \mathbb{E}[X] \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n) \quad (1)$$

Mostrare inoltre che per ogni $p \geq 1$ vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^p - (n-1)^p) P(X \geq n) \leq \mathbb{E}[X^p] \leq \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)^p - n^p) P(X > n)$$

Mostrare infine che se X è a valori in $\mathbb{N}$ allora le disuguaglianze precedenti diventano uguaglianze.

Esercizio 5. Sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite, quasi certamente positive e di media finita. Sia

$$Y_n := \frac{\max(X_1, \dots, X_n)}{n}$$

(a) Quanto vale il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nP(X_1 > n)$$

(b) Quanto vale il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nP(X_1 > nt) \quad \text{con } t > 0$$

(c) Studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità e quasi certa di $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. (**Sugg:** può essere utile la disuguaglianza (1))

(d)** E' possibile rimuovendo la sola ipotesi " X_n di media finita" costruire un esempio di distribuzione per X_n tale che $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converga quasi certamente a più infinito.