Esercizi di Calcolo delle Probabilità
Foglio 5

David Barbato

`(Svolgere l'esercizio 3 solo dopo aver studiato la legge dei grandi numeri.)`

Esercizio 1. *Siano* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e* X *variabili aleatorie. Sia* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *una funzione continua, limitata, strettamente crescente e nulla in zero. Sia infine*

$$Y_n = f(X_n - X)$$

(a) Dimostrare che se $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} 0$ *allora* $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{prob.} X$.
(b) Dimostrare che se $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{prob.} X$ *allora* $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} 0$.

Esercizio 2. *Sia* $(\Omega,\mathcal{H},P)$ *uno spazio di probabilità. Sia* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione positiva e crescente tale che* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. *Sia* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una famiglia di variabili aleatorie identicamente distribuite con distribuzione data da* $P(X_n=-1) = P(X_n=+1) = \frac{1}{2}$. *Per ogni* $n\in\mathbb{N}$ *definiamo le* σ*-algebre:*

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_n) \qquad \mathcal{T}_n := \bigvee_{k>n} \mathcal{F}_k \qquad \mathcal{T} := \cap_n \mathcal{T}_n$$

.
Siano infine $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e* Z *assegnate nel seguente modo:*

$$Y_n := X_1 + \ldots + X_n$$

$$Z_n := \frac{Y_n}{a_n}$$

$$Z := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} Z_n & \text{se il limite esiste (anche eventualmente infinito)} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Dimostrare che Z *è* $\mathcal{T}$ *misurabile.*
(b) Costruire, se possibile, un modello che soddisfi le ipotesi dell'esercizio e tale che $P(|Z|=7)=1$
(c) Costruire, se possibile, un modello che soddisfi le ipotesi dell'esercizio tale che le $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *siano indipendenti e* $P(|Z|=+\infty)=1$. *(`Sugg: può essere utile il risultato del quesito (a)`)*

Esercizio 3. *Siano* $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione e* p *e* q *numeri tali che per ogni* n *si abbia* $1 > q > p_n > p > 0$ *e valga il limite* $\lim_{n\to\infty} p_n = p$. *Siano* $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione uniforme su* $(0,1)$ *per ogni* n *siano infine assegate le seguenti varibili aleatorie:*

$$X_n := I_{\{U_n<q\}} \qquad Y_n := I_{\{U_n<p_n\}} \qquad Z_n := I_{\{U_n<p\}}$$

$$S_n := X_1 + \ldots + X_n \qquad T_n := Y_1 + \ldots + Y_n \qquad W_n := Z_1 + \ldots + Z_n$$

(a) Quali sono le distribuzioni di X_n, Y_n *e* Z_n*? Calcolare media e varianza di* S_n, T_n *e* W_n.
(b) Cosa si può dire dei limiti $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$ *e* $\lim_{n\to\infty} \frac{W_n}{n}$ *?*
(c) Dimostrare che vale

$$q \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} \geq \liminf_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} \geq p \qquad \textit{quasi certamente}$$

(d) Dimostrare che la somma $\frac{Y_1+\ldots+Y_n}{n}$ *converge a* p *quasi certamente.*

Esercizio 4. *Sia* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di variabili aleatorie indipendenti e assolutamente continue con densità* f_n *assegnata:*

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{n^\alpha}{(n^\alpha x+1)^2} & \textit{Se } x > 0 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare la funzione di ripartizione di X_n. *Al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$ *studiare la convergenza della successione* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *in distribuzione, in probabilità, quasi certa ed in* L^p. *Eventualmente considerare la convergenza in* $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. *Considerare separatamente i casi* $\alpha < -1$, $\alpha \in [-1, 0)$, $\alpha = 0$, $\alpha \in (0, 1]$,$\alpha > 1$.

Esercizio 5. *Sia* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di variabili aleatorie i.i.d. assolutamente continue con densità* f *assegnata:*

$$f(x) := \begin{cases} 2x & \textit{Se } 0 < x < 1 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Sia inoltre

$$Y_n := n^\alpha \min\{X_1, \ldots, X_n\}$$

(a) Calcolare la funzione di ripartizione di Y_n.
(b) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ *studiare la convergenza in distribuzione di* $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.