

Esercizi di Calcolo delle Probabilità

Foglio 9

David Barbato

Esercizio 1. (21/02/2017)

Sia $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una martingala limitata (esiste $M > 0$ tale che per ogni n vale $P(|X_n| < M) = 1$)

(a) Dimostrare che per ogni $m > n$ vale $\mathbb{E}[(X_m - X_n)^2] = \text{Var}(X_m) - \text{Var}(X_n)$.

(b) Dimostrare che X_n converge in L^2 .

Esercizio 2. (21/02/2017)

Sia $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione normale $X_n \sim N(0, 1)$. Sia $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la filtrazione data da: $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \dots, X_n\}$. Siano infine assegnate le variabili aleatorie:

$$Z_n := \sum_{j=1}^n \frac{X_j}{j} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(a) Dire se $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una martingala, una sottomartingala o una supermartingala. (con dimostrazione o controesempi.)

(b) Studiare la convergenza in distribuzione di $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

(c) Studiare la convergenza in L^2 di $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Esercizio 3. (05/07/2017)

Costruire un esempio di submartingala $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E}[X_n] = \text{Var}(X_n) = n$$

Esercizio 4. (07/09/2017)

Sia $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una martingala rispetto ad una filtrazione $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Dimostrare che se le variabili aleatorie $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sono indipendenti allora sono quasi certamente costanti (cioè esiste una costante C tale che per ogni n si abbia $P(X_n = C) = 1$).

Esercizio 5. (07/09/2017)

Costruire un esempio di martingala $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che:

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty\right) = P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = -\infty\right) = \frac{1}{2}$$

Esercizio 6. (21/09/2017)

Sia $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una supermartingala rispetto ad una filtrazione $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Dimostrare che $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una martingala se e solo se esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $\mathbb{E}[X_n] = C$.

Soluzioni (Nelle soluzioni è stato omesso lo svolgimento dei passaggi più semplici)

Esercizio 1. (21/02/2017)

(a) Sia $m > n$,

$$\mathbb{E}[(X_m - X_n)^2] = \mathbb{E}[X_m^2] - 2\mathbb{E}[X_m X_n] + \mathbb{E}[X_n^2]$$

appliciamo la formula $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]]$ al secondo termine del secondo membro.

$$\mathbb{E}[X_m X_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_m X_n | \mathcal{F}_n]] = \mathbb{E}[X_n \mathbb{E}[X_m | \mathcal{F}_n]] = \mathbb{E}[X_n^2]$$

dunque

$$\mathbb{E}[(X_m - X_n)^2] = \mathbb{E}[X_m^2] - \mathbb{E}[X_n^2]$$

Analizziamo ora $\text{Var}(X_m) - \text{Var}(X_n)$:

$$\text{Var}(X_m) - \text{Var}(X_n) = \mathbb{E}[X_m^2] - \mathbb{E}[X_m]^2 - \mathbb{E}[X_n^2] + \mathbb{E}[X_n]^2$$

poiché $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una martingala $\mathbb{E}[X_m] = \mathbb{E}[X_n]$ e quindi sostituendo si ottiene

$$\text{Var}(X_m) - \text{Var}(X_n) = \mathbb{E}[X_m^2] - \mathbb{E}[X_n^2]$$

(b) Consideriamo la successione $\text{Var}(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ per il quesito (a) è una successione non decrescente e per l'ipotesi di limitatezza delle $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione limitata. Quindi converge. Sia Γ il limite.

$$\text{Var}(X_n) \uparrow \Gamma$$

Mostreremo che $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy rispetto alla norma L^2 .

$$\|X_m - X_n\|_{L^2}^2 = \mathbb{E}[(X_m - X_n)^2] = \text{Var}(X_m) - \text{Var}(X_n)$$

Sia $\epsilon > 0$ fissato, poiché $\text{Var}(X_n) \uparrow \Gamma$ allora esiste $\bar{n}$ tale per ogni $n > \bar{n}$ si abbia $\text{Var}(X_n) \in (\Gamma - \epsilon, \Gamma]$. Allora per ogni $n, m > \bar{n}$ vale

$$\text{Var}(X_m) - \text{Var}(X_n) < \epsilon$$

e dunque

$$\|X_m - X_n\|_{L^2}^2 < \epsilon$$

Esercizio 2. (21/02/2017)

(a) $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una martingala perché è somma di variabili indipendenti e di media nulla.

(b) Il quesito (b) si può dedurre dal quesito (c) che dimostreremo.

(c) Mostreremo che $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di cauchy rispetto alla norma L^2 . Siano $n, m \in \mathbb{N}$ con $n < m$.

$$\begin{aligned} \|Z_m - Z_n\|_{L^2}^2 &= \mathbb{E}[(Z_m - Z_n)^2] = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=1}^m \frac{X_j}{j} - \sum_{j=1}^n \frac{X_j}{j} \right)^2 \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=n+1}^m \frac{X_j}{j} \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=n+1}^m \frac{X_j}{j} \right) \left(\sum_{k=n+1}^m \frac{X_k}{k} \right) \right] = \\ &= \sum_{j=n+1}^m \sum_{k=n+1}^m \mathbb{E} \left[\left(\frac{X_j}{j} \right) \left(\frac{X_k}{k} \right) \right] = \end{aligned}$$

se $j \neq k$ le variabili aleatorie X_j e X_k sono indipendenti e si ha:

$\mathbb{E} \left[\left(\frac{X_j}{j} \right) \left(\frac{X_k}{k} \right) \right] = \mathbb{E} \left[\frac{X_j}{j} \right] \mathbb{E} \left[\frac{X_k}{k} \right] = 0$. Quindi i termini con $j \neq k$ si annullano e si ha:

$$\|Z_m - Z_n\|_{L^2}^2 = \mathbb{E} \left[\sum_{j=n+1}^m \left(\frac{X_j}{j} \right)^2 \right] = \sum_{j=n+1}^m \frac{1}{j^2}$$

La serie $\sum_j \frac{1}{j^2}$ è convergente dunque per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\bar{n}$ tale che

$\sum_{j \geq \bar{n}} \frac{1}{j^2} < \epsilon$ e dunque per ogni $n, m > \bar{n}$ si ha:

$$\|Z_m - Z_n\|_{L^2} < \epsilon$$

Esercizio 3. (05/07/2017)

Gli esempi che si possono costruire sono moltissimi. Una possibilità è la seguente. Siano $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ delle variabili aleatorie indipendenti di media 1 e varianza 1 (per esempio $Y_n \sim \text{Poisson}(1)$ oppure $Y_n \sim N(1, 1)$).

$$X_n := Y_1 + \dots + Y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{F}_n := \sigma(Y_1, \dots, Y_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Allora le X_n sono misurabili rispetto a $\mathcal{F}_n$ hanno media n e varianza n e infine

$$\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_{n-1} + Y_n | \mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1} + \mathbb{E}[Y_n | \mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1} + 1 \quad q.c.$$

Esercizio 4. (07/09/2017)

Poiché $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una martingala allora si ha:

$$\mathbb{E}[X_n] = E[X_0] =: C$$

e per ogni $n > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_n - X_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-1}] &= 0 & q.c. \\ \Downarrow \\ \mathbb{E}[(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1}] &= 0 & q.c. \\ \Downarrow \\ \mathbb{E}[(X_n) - X_{n-1}] &= 0 & q.c. \\ \Downarrow \\ C - X_{n-1} &= 0 & q.c. \end{aligned}$$

Esercizio 5. (07/09/2017)

Questo esercizio è più difficile rispetto agli altri. Un buon suggerimento prima di leggere il resto della soluzione può essere quello di provare a costruire una martingala $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ che converge quasi certamente a più infinito.

Costruiremo ora una martingala $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ che converge quasi certamente a più infinito. Il modo più semplice per costruire una martingala è di definirla come somma di v.a. indipendenti e a media nulla:

$$Y_n := Z_1 + \dots + Z_n$$

quale distribuzione assegnare a Z_n ? Le variabili Z_n devono avere media nulla e vogliamo che abbiano una probabilità molto piccola di assumere valori negativi. Per esempio potremmo richiedere:

$$P(Z_n = 1) = 1 - 2^{-n} \quad P(Z_n = -a_n) = 2^{-n} \quad \text{e} \quad \mathbb{E}[Z_n] = 0$$

con a_n positivi. Mettendo a sistema le tre equazioni (non è scontato che ci sia una soluzione) troviamo la soluzione $a_n = 1 - 2^n$.

Supponiamo ora che le Z_n abbiano la distribuzione indicata sopra con $a_n = 1 - 2^n$. Osserviamo che

$$\sum_n P(Z_n \neq 1) < \infty$$

Applicando il primo lemma di Borell cantelli si ha che per quasi ogni $\omega \in \Omega$ vale $\lim_n Z_n(\omega) = 1$ e quindi $\lim_n Y_n(\omega) = \infty$.

Dunque abbiamo trovato una martingala $Y_n := Z_1 + \dots + Z_n$ tale che

$$P(\lim_n Y_n = +\infty) = 1$$

Sia ora T una v.a. indipendente dalle $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $P(T = -1) = P(T = 1) = \frac{1}{2}$, poniamo

$$X_n := T \cdot Y_n \quad \forall n$$

Si verifica con non troppa difficoltà che $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una martingala e verifica le condizioni dell'esercizio.

Esercizio 6. (21/09/2017)

La parte difficile dell'esercizio è mostrare che

$$\mathbb{E}[X_n - X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] = 0 \quad q.c.$$

Poiché $\mathbb{E}[X_n] = C$ per ogni n allora vale $\mathbb{E}[X_n - X_{n-1}] = 0$. Le ipotesi utili diventano

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n - X_{n-1}] &= 0 \\ \mathbb{E}[X_n - X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] &\leq 0 \quad q.c. \end{aligned}$$

utilizzando la proprietà $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{F}]]$ si ottiene

$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n - X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}]] = \mathbb{E}[X_n - X_{n-1}] = 0$ posto $Y := \mathbb{E}[X_n - X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}]$ quindi si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= 0 \\ Y &\leq 0 \quad q.c. \end{aligned} \quad \implies \quad Y = 0 \quad q.c.$$