Prova d'esame
di Istituzioni di Calcolo delle Probabilità (B)
31/03/2012

N. MATRICOLA ....

COGNOME e NOME..

Esercizio 1

In una sala vi sono 90 persone. Supponiamo che le loro date di nascita siano indipendenti ed uniformemente distribuite tra i 365 giorni dell'anno. (Assumiamo che nessuno sia nato il 29 Febbraio.) Sia infine X il numero di persone nate il 22 marzo.
(a) A quale distribuzione appartiene la variabile aleatoria X?
(b) Calcolare $\mathbb{E}[X]$ e $Var[X]$.
(c) Quanto vale la probabilità che nessuno sia nato il 22 marzo.
(d) Vogliamo stimare $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ e $P(X = 2)$. Quale distribuzione conviene scegliere per approssimare la distribuzione di X?
(e) Stimare $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ e $P(X = 2)$.
(f) Stimare $P(X > 1|X \neq 0)$

Esercizio 2

Esporre la proprietà “assenza di memoria” per le variabili aleatorie esponenziali.

Esercizio 3

Sia X una v.a. continua con densità f_X data da:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{4\sqrt{x}} & \text{se } 1 \leq x < 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.
(b) Calcolare la funzione di ripartizione F_X.
(c) Calcolare la funzione di rischio della v.a. X.
(d) Data la variabile aleatoria $Y \sim Unif(0,1)$. Trovare una funzione g da $(0,1)$ in $\mathbb{R}$ non decrescente tale che posto $Z = g(Y)$ si abbia $X \sim Z$.

Esercizio 4

Sia (X, Y) un vettore aleatorio con distribuzione assolutamente continua con densità $f_{(X,Y)}$ data da:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \alpha(3 - x \cdot y) & \text{se } |x| < 1,\ |y| < 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Calcolare α.
(b) Calcolare la funzione di densità f_X.
(c) Calcolare la funzione di densità f_Y.
(d) Calcolare la funzione di ripartizione F_X.
(e) Calcolare la funzione di ripartizione F_Y.
(f) Le variabili aleatorie X e Y appartengono ad una distribuzione nota? Quale? Indicare gli eventuali parametri.
(g) Le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti? Giustificare la risposta.
(h) Calcolare $\mathbb{E}[X]$ e $VAR[X]$. (utilizzare il risultato del quesito (f).)
(i) Calcolare $P(X > 0, Y > 2)$.
(l) Calcolare $P(X > 0|Y > 2)$.

Esercizio 5

Siano X, Y e Z tre variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che X sia normale di media $\mu = 2$ e varianza $\sigma^2 = 4$, Y sia binomiale di parametri $n = 3$ e $p = \frac{2}{3}$ mentre Z sia discreta con $P(Z = -3) = P(Z = 1) = P(Z = 3) = \frac{1}{3}$. Siano infine $S = X + Y + Z$, $T = X \cdot Y \cdot Z$ e $W = \max\{X, Y, Z\}$.

(a) Calcolare $\mathbb{E}[Z]$ e $\mathrm{VAR}(Z)$.
(b) Calcolare $\mathbb{E}[S]$ e $\mathrm{VAR}(S)$.
(c) Calcolare $\mathbb{E}[T]$ e $\mathrm{VAR}(T)$.
(d) Calcolare $P(X \leq 0)$,$P(Y \leq 0)$ e $P(Z \leq 0)$.
(e) Calcolare $P(W \leq 0)$.
(f) Calcolare $P(X \leq 1)$,$P(Y \leq 1)$ e $P(Z \leq 1)$.
(g) Calcolare $P(W \leq 1)$.
(h) Calcolare $P(W = 0)$.
(i) Calcolare la funzione generatrice dei momenti di Z.