

Prova d'esame
di Istituzioni di Calcolo delle Probabilità (B)
01/09/2011

N. MATRICOLA

COGNOME e NOME.....

Esercizio 1

Se possibile, indicare i risultati sotto forma di frazioni

Alessia e Daniele possiedono due dadi a sei facce. Il dado di Daniele è regolare mentre quello di Alessia è truccato. Indichiamo con A il risultato del lancio del dado di Alessia e con D il risultato del lancio del dado di Daniele. Supponiamo infine che il dado di Alessia abbia la seguente distribuzione: $P(A = 6) = 0.3$, $P(A = 5) = 0.2$, $P(A = 4) = 0.2$, $P(A = 3) = 0.1$, $P(A = 2) = 0.1$, $P(A = 1) = 0.1$.

(a) Calcolare $P(A > 3)$.

(b) Calcolare $\mathbb{E}[A]$.

(c) Calcolare $P(D > 3)$.

(d) Calcolare $P(A = 6, D = 6)$.

(e) Calcolare $P(A = 5, D = 4)$.

(f) Calcolare $P(A > 3, D > 3)$.

(g) Calcolare $P(A = 6 | A > 3)$.

(h) Calcolare $P(A = 6 | D > 3)$.

(i) Calcolare $P(A + D = 11)$.

(l) Calcolare $P(A \cdot D > 20)$.

(m) Calcolare $P(A > D)$.

Esercizio 2

Sia (X, Y) un vettore aleatorio. Siano X e Y indipendenti, X abbia una distribuzione esponenziale di parametro 1 e Y abbia una distribuzione uniforme sull'intervallo $(0, 1)$. Siano infine $Z := \min\{X, Y\}$ e $T := \max\{X, Y\}$.

(a) Calcolare la funzione di densità congiunta $f_{(X,Y)}$.

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \left\{ \right.$$

(b) Calcolare la probabilità $P(X > Y)$.

(c) Quanto vale $\mathbb{E}[e^{X+Y}]$? Giustificare la risposta.

(d) Calcolare la funzione di ripartizione F_Z della variabile aleatoria Z .

(e) Calcolare la funzione di ripartizione F_T della variabile aleatoria T .

Esercizio 3

Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che X sia una v.a. normale di media 1 e varianza 9 e Y sia una v.a. normale di media μ_Y e varianza σ_Y^2 . Sia $W := X + Y$. Indichiamo infine con Φ la funzione di ripartizione di una normale standard.

- (a) Qual è la distribuzione di W ?
- (b) Calcolare $\mathbb{E}[(X + Y + W)]$.
- (c) Calcolare $\mathbb{E}[(X \cdot W)]$.
- (d) Calcolare $\mathbb{E}[(X + Y + W)^2]$.
- (e) Calcolare $P(X > 4)$.
- (f) Calcolare $P(X > a)$. (Esprimere il risultato utilizzando la funzione Φ)
- (g) Se $P(X > b) = 0.02275$, quanto vale b ?
- (h) Calcolare $P(Y > 4)$. (Esprimere il risultato utilizzando la funzione Φ)
- (i) Per quali valori di μ_Y si ha $P(Y > 4) = \frac{1}{2}$?
- (l) Per quali valori di μ_Y e σ_Y si ha $P(Y > 4) = \frac{1}{2}$ e $P(Y > 8) = 0.02275$?