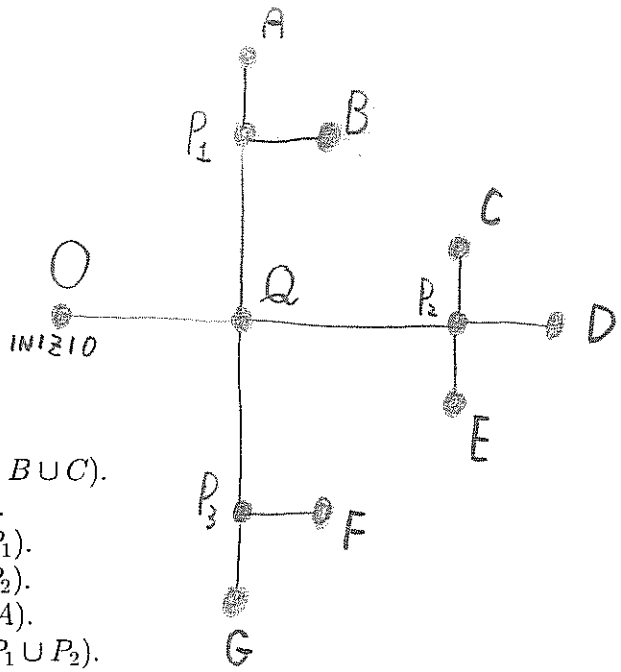
# Prova d'esame
# di Istituzioni di Calcolo delle Probabilità (B)
# 10/12/2012

**N. MATRICOLA** .....

**COGNOME e NOME**.....

**Esercizio 1**

Un pedone inizia a camminare dal punto $O$ verso il punto $Q$, arrivato in $Q$ sceglie a caso una delle tre direzioni possibili e procede fino a giungere ad una delle tre posizioni $P_1$, $P_2$ e $P_3$, a questo punto sceglie di nuovo una direzione a caso (senza tornare mai indietro) e procede fino a raggiungere una delle destinazioni $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ e $G$. Indichiamo con $P_1$ (risp. $P_2$ e $P_3$) l'evento passa per il punto $P_1$ (risp. $P_2$ e $P_3$) e indichiamo con $A$ (risp. $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ e $G$) l'evento giunge al punto $A$ (risp. $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ e $G$).
`Sceglie a caso vuol dire che se deve scegliere tra due possibili strade ciascuna strada ha probabilità` $\frac{1}{2}$ `di essere scelta, mentre se le strade sono 3 allora la probabilità è` $\frac{1}{3}$.




(a) Calcolare la probabilità $P(A)$.
(b) Calcolare la probabilità $P(C)$.
(c) Calcolare la probabilità $P(A \cup B \cup C)$.
(d) Calcolare la probabilità $P(P_3)$.
(e) Calcolare la probabilità $P(A|P_1)$.
(f) Calcolare la probabilità $P(C|P_2)$.
(g) Calcolare la probabilità $P(P_1|A)$.
(h) Calcolare la probabilità $P(A|P_1 \cup P_2)$.
(i) Calcolare la probabilità $P(P_1|A \cup C)$.

**Esercizio 2**

Siano $a$ e $b$ due numeri reali positivi. Sia $f_X$ la seguente funzione:

$$f_{(X)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < a \\ b \cdot e^{-x} & \text{se} \quad x \geq a \end{cases}$$

(a) Sia $a$ fissato. Per quali valori di $b$ la funzione $f_X$ è la densità di una v.a. $X$? (`Sugg.` $b$ `dipende da` $a$ )
(b) Assumiamo d'ora in poi per $b$ il valore calcolato in (a). Calcolare la funzione di ripartizione $F_X$.
(c) Calcolare la funzione di rischio della v.a. $X$.
(d) Calcolare il valore atteso $\mathbb{E}[X]$.

**Esercizio 3**
Sia $(X, Y)$ un vettore aleatorio con distribuzione assolutamente continua con densità $f_{(X,Y)}$ data da:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \alpha y^x & \text{se } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Calcolare la funzione di densità $f_X$.
(b) Calcolare $\alpha$. (`Utilizzare la formula` $\int f_X(x)dx = 1$)
(c) Calcolare la funzione di ripartizione $F_X$.
(d) Calcolare il valore atteso $\mathbb{E}[X]$. (`Sugg. può essere utile l'uguaglianza` $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X+1] - \mathbb{E}[1]$)
(e) Calcolare il valore atteso $\mathbb{E}[y^{-x}]$.

**Esercizio 4**
Siano $X$, $Y$ due variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che $X$ abbia una distribuzione normale di media $\mu = 2$ e varianza $\sigma^2 = 9$ mentre $Y$ sia una v.a. discreta con distribuzione data da:
$P(Y = 1) = P(Y = 2) = P(Y = 5) = P(Y = 10) = \frac{1}{4}$. Sia infine $T = X \cdot Y$.
(a) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.
(b) Calcolare $\mathbb{E}[Y^2]$.
(c) Calcolare VAR$[Y]$.
(d) Calcolare $\mathbb{E}[T]$.
(e) Calcolare $\mathbb{E}[T^2]$.
(f) Calcolare VAR$[T]$.
(g) Calcolare $P(X > 0)$.
(h) Calcolare $P(T > 0)$.
(i) Calcolare la funzione generatrice dei momenti della v.a. $Y$.