

Prova d'esame
di Istituzioni di Calcolo delle Probabilità (B)
01/04/2011

N. MATRICOLA

COGNOME e NOME.....

Esercizio 1

Se possibile, indicare i risultati sotto forma di frazioni

Consideriamo un dado regolare a 6 facce e un mazzo di 6 carte numerate da 1 a 6 e disposte in ordine casuale. Viene lanciato il dado, se il risultato N del lancio è dispari viene girata la prima carta del mazzo, se invece N è pari vengono girate le prime due carte del mazzo. Sia X_1 il valore della prima carta girata e sia eventualmente X_2 il valore della seconda carta girata, sia infine S la somma delle carte girate: $S = \begin{cases} X_1 & \text{se } N \text{ è dispari} \\ X_1 + X_2 & \text{se } N \text{ è pari} \end{cases}$.

(a) Calcolare $\mathbb{E}[X_1]$.

(b) Calcolare $\mathbb{E}[X_1 + N]$.

(c) Quanto vale la probabilità condizionata $P(X_1 > 3 | N = 3)$?

(d) Quanto vale la probabilità condizionata $P(X_1 = 2, X_2 = 4 | N \text{ è pari})$?

(e) Calcolare $P(S = 11 | N \text{ è pari})$.

(f) Quanto vale $P(S = 12 | N \text{ è pari})$?

(g) Calcolare $P(S = 6 | N \text{ è pari})$.

(h) Quanto vale la probabilità condizionata $P(N \text{ è pari} | S = 6)$?

(i) Qual è la probabilità che N sia strettamente maggiore di X_1 ?

(l) Qual è il valore medio di S ?

Soluzioni

(a) $\frac{7}{2}$, (b) 7, (c) $\frac{1}{2}$, (d) $\frac{1}{30}$, (e) $\frac{1}{15}$, (f) 0, (g) $\frac{2}{15}$, (h) $\frac{4}{9}$, (i) $\frac{5}{12}$, (l) $\frac{21}{4}$

Esercizio 2

Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità $f_{(X,Y)}$:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \alpha(2 + x + y + xy) & (x, y) \in Q \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < x < 0, -2 < y < 0\}$

(a) Calcolare α .

(b) Calcolare la funzione di densità f_X .

$$f_X(x) = \begin{cases}$$

(c) Calcolare la funzione di densità f_Y .

$$f_Y(y) = \begin{cases}$$

(d) Calcolare la funzione di ripartizione F_X .

$$F_X(x) = \begin{cases}$$

(e) Calcolare la funzione di ripartizione F_Y .

$$F_Y(y) = \begin{cases}$$

(f) Calcolare $F_{(X,Y)}(x, y)$ per $(x, y) \in Q$.

(g) Le variabili aleatorie X e Y appartengono ad una distribuzione nota vista durante il corso? Se sì, quale?

(h) Le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti? Giustificare la risposta.

(i) Calcolare $\mathbb{E}[e^X]$. (utilizzare (b))

(l) Calcolare $\mathbb{E}[XY]$.

(m) Calcolare la covarianza $\text{COV}(X, Y)$.

Soluzioni esercizio 2

(a) $\alpha = \frac{1}{4}$

(b) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } x \in (-2, 0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$

(c) $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } y \in (-2, 0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$

(d) $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -2 \\ \frac{x+2}{2} & \text{se } x \in [-2, 0) \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$

(e) $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < -2 \\ \frac{y+2}{2} & \text{se } y \in [-2, 0) \\ 1 & \text{se } y \geq 0 \end{cases}.$

(f) $F_{(X,Y)(a,b)} = \frac{1}{4}(4 + 2a + 2b + 2ab + \frac{a^2b}{2} + \frac{ab^2}{2} + \frac{a^2b^2}{4}).$

(g) $X \sim Y \sim \text{Unif}(-2, 0).$

(h) Non sono indipendenti perché $f_X \cdot f_Y \neq f_{(X,Y)}.$

(i) $\mathbb{E}[e^X] = \frac{1-e^{-2}}{2}.$

(l) $\mathbb{E}[XY] = \frac{10}{9}.$

(m) $\text{COV}(X, Y) = \frac{1}{9}.$

Esercizio 3

Siano X , Y e Z tre variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che X sia normale di media $\mu = 3$ e varianza $\sigma^2 = 1$, Z sia esponenziale di parametro $\lambda = 4$ e Y sia una variabile aleatoria discreta tale che $P(Y = -2) = \frac{1}{4}$, $P(Y = 0) = \frac{1}{2}$ e $P(Y = +2) = \frac{1}{4}$. Siano infine $S = X + Y + Z$, $T = X \cdot Y \cdot Z$ e $W = \max\{Y, Z\}$

- (a) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.
- (b) Calcolare $\mathbb{E}[Y^2]$ e $\text{VAR}(Y)$.
- (c) Calcolare $\mathbb{E}[S]$ e $\mathbb{E}[T]$.
- (d) Calcolare $\mathbb{E}[S^2]$ e $\text{VAR}(S)$.
- (e) Calcolare $\mathbb{E}[T^2]$ e $\text{VAR}(T)$.
- (f) Calcolare $\mathbb{E}[(X + Y)(X - Y)]$.
- (g) Calcolare $P(W = 2)$.
- (h) Calcolare $F_W(t)$ per $t \in [0, 2)$.
- (i) Calcolare $F_W(t)$ per $t \geq 2$.
- (l) Calcolare $P(X > Y)$. (Indicare eventualmente con Φ la funzione di ripartizione della normale standard).

Soluzioni

- (a) 0,
- (b) 2, 2,
- (c) $\frac{13}{4}$, 0,
- (d) $\frac{109}{8}$, $\frac{49}{16}$
- (e) $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{2}$,
- (f) 8,
- (g) $\frac{1-e^{-8}}{4}$,
- (h) $\frac{3}{4}(1 - e^{-4t})$,
- (i) $(1 - e^{-4t})$,
- (l) $\frac{\Phi(5)+2\cdot\Phi(3)+\Phi(1)}{4}$