

Prova d'esame
di Istituzioni di Calcolo delle Probabilità (B)
01/07/2011

N. MATRICOLA

COGNOME e NOME.....

Esercizio 1

Se possibile, indicare i risultati sotto forma di frazioni

Consideriamo due mazzi di carte. Il primo mazzo (A) è costituito da 6 carte con i numeri $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mentre il secondo mazzo (B) è costituito da 8 carte con i numeri $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Scegliamo un mazzo a caso e estraiamo una carta a caso dal mazzo.

(a) Qual è la probabilità che la carta estratta sia un 2?

(b) Qual è la probabilità che la carta estratta sia un 10?

(c) Qual è la probabilità che la carta estratta sia un 4?

(d) Qual è la probabilità che la carta estratta sia minore (stretto) di 5?

(e) Sapendo che la carta estratta è un 3, qual è la probabilità che sia stata estratta dal mazzo A?

(f) Sapendo che la carta estratta è minore (stretto) di 5, qual è la probabilità che sia stata estratta dal mazzo A?

(g) Sia X_A il valore di una carta estratta a caso dal mazzo A. Quanto vale $\mathbb{E}[X_A]$?

(h) Sia X_B il valore di una carta estratta a caso dal mazzo B. Quanto vale $\mathbb{E}[X_B]$?

(i) Scegliamo un mazzo a caso ed estraiamo una carta a caso. Indichiamo con X il valore della carta. Quanto vale $\mathbb{E}[X]$?

SOL: (a) $\frac{1}{12}$, (b) $\frac{1}{16}$, (c) $\frac{7}{48}$, (d) $\frac{11}{24}$, (e) $\frac{4}{7}$, (f) $\frac{8}{11}$, (g) $\frac{7}{2}$, (h) $\frac{13}{2}$, (i) 5,

Esercizio 2

Giacomo possiede una moneta truccata. Ad ogni lancio c'è una probabilità p di realizzare testa e $1 - p$ di realizzare croce. Decide di scommettere con Luigi sul risultato del lancio. Se esce testa Luigi darà a Giacomo 1 € se invece esce croce Giacomo darà a Luigi 10 €.

- (a) Calcolare la vincita media di Luigi. (Dipende dal parametro p)
- (b) Calcolare la vincita media di Giacomo.
- (c) Per quali valori del parametro p la scommessa è mediamente conveniente per Luigi.
- (d) Per quali valori del parametro p la probabilità che su 10 lanci esca 10 volte testa è del 50%.

SOL: (a) $10 - 11p$, (b) $11p - 10$, (c) $p < \frac{10}{11}$, (d) $p = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{\frac{1}{2}}$,

Esercizio 3

Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità $f_{(X,Y)}$:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(x+y)}(e^{-x} + e^{-y}) & (x, y) \in D \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x\}$

(a) Calcolare la funzione di densità f_X .

$$f_X(x) = \begin{cases}$$

(b) Calcolare la funzione di densità f_Y .

$$f_Y(y) = \begin{cases}$$

(c) Calcolare la funzione di ripartizione F_X .

$$F_X(x) = \begin{cases}$$

(d) Calcolare la funzione di ripartizione F_Y .

$$F_Y(y) = \begin{cases}$$

(e) La variabile aleatoria Y appartengono ad una distribuzione nota vista durante il corso? Se sì, quale?

(f) Le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti? Giustificare la risposta.

(g) Calcolare $P(Y \leq 1)$.

SOLUZIONI:

$$(a) f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} + 2e^{-2x} - 3e^{-3x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$(b) f_Y(y) = \begin{cases} 3e^{-3y} & \text{se } y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$(c) F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - e^{-2x} + e^{-3x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$(d) F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-3y} & \text{se } y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(e) Y è una v.a. esponenziale di parametro 3, (f) Non sono indipendenti perchè il supporto (D) del vettore (X, Y) è diverso dal prodotto (cartesiano) dei supporti di X e Y . Oppure X e Y non sono indipendenti perchè $f_{(X,Y)}$ non è uguale a $f_X \cdot f_Y$. (g) $P(Y \leq 1) = F_Y(1) = 1 - e^{-3}$

Esercizio 4

Siano X , Y e Z tre variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che X sia una v.a. uniforme sull'intervallo $[0, 2]$, Y sia normale di media $\mu = 0$ e varianza $\sigma^2 = 2$, Z sia binomiale di parametri $n = 4$ e $p = \frac{1}{3}$. Siano infine $T = X \cdot Y \cdot Z$ e $W = \min\{X, Z\}$.

- (a) Calcolare $\mathbb{E}[T]$.
- (b) Calcolare $\mathbb{E}[T^2]$.
- (c) Calcolare $\text{VAR}(T)$.
- (d) Calcolare $P(T = 0)$.
- (e) Calcolare $P(T > 0)$.
- (f) Calcolare $P(X \cdot Z > 7)$.
- (g) Calcolare $P(W = 0)$.
- (h) Calcolare $P(W = 1)$.
- (i) Calcolare $P(W = 2)$.
- (l) Calcolare $P(Z > X)$.

SOLUZIONI:

- (a) 0, (b) $\frac{64}{9}$, (c) $\frac{64}{9}$, (d) $\frac{16}{81}$, (e) $\frac{65}{162}$, (f) $\frac{1}{648}$, (g) $\frac{16}{81}$, (h) $\frac{16}{81}$, (i) 0, (l) $\frac{49}{81}$,