

Prova d'esame
di Istituzioni di Calcolo delle Probabilità (B)
15/12/2011

N. MATRICOLA

COGNOME e NOME.....

Esercizio 1

Se possibile, indicare i risultati sotto forma di frazioni

Vengono lanciati due dadi regolari, sia X il risultato del primo dado e Y il risultato del secondo dado, sia infine S la somma $S = X + Y$.

(a) Qual è la probabilità che X sia pari?

(b) Qual è la probabilità che la somma S sia dispari?

(c) Qual è la probabilità che X e Y siano entrambi pari?

(d) Sapendo che non sono entrambi pari, qual è la probabilità che X e Y siano entrambi dispari?

(e) Calcolare $P(S = 12)$.

(f) Qual è la probabilità che $S = 2$ se sappiamo che X e Y sono entrambi dispari?

Effettuiamo una serie ripetuta di lanci finché la somma dei due dadi non dia 12, sia Z il numero di lanci effettuati.

(g) Qual è la distribuzione di Z ? (Indicare qual è la distribuzione di Z tra quelle note e indicare il valore degli eventuali parametri.)

(h) Qual è la media di Z ?

(i) Calcolare $P(Z > 10)$.

(l) Calcolare $P(Z > n)$ dove n è un intero positivo.

(m) Per quali valori di n si ha $P(Z > n) < \frac{1}{2}$.

Soluzioni

(a) $\frac{1}{2}$, (b) $\frac{1}{2}$, (c) $\frac{1}{4}$, (d) $\frac{1}{3}$, (e) $\frac{1}{36}$, (f) $\frac{1}{9}$, (g) $Z \sim Geo(\frac{1}{36})$, (h) 36, (i) $(\frac{35}{36})^{10}$,
(l) $(\frac{35}{36})^n$, (m) $n > \frac{\log(2)}{\log(\frac{36}{35})}$, $n > 24$

Esercizio 2

Sia (X, Y) un vettore aleatorio assolutamente continuo con densità $f_{(X,Y)}$:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{1+xy}{4} & \text{se } (x, y) \in Q \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove Q è il quadrato definito da $Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\}$

- (a) Calcolare la funzione di densità congiunta f_X .
- (b) Calcolare la funzione di densità congiunta f_Y .
- (c) Calcolare la funzione di ripartizione cumulativa F_X .
- (d) Calcolare la funzione di ripartizione cumulativa F_Y .
- (e) A quale distribuzione appartengono le v.a. X e Y ? (Indicare quali sono le distribuzioni di X e Y tra quelle note e indicare il valore degli eventuali parametri.)
- (f) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$ e $P(Y > 0)$.
- (g) Le v.a. X e Y sono indipendenti? Giustificare la risposta.
- (h) Calcolare $\mathbb{E}[XY]$.
- (i) Quanto vale $\text{COV}[X, Y]$?
- (l) Calcolare $P(X > 0, Y > 0)$.
- (m) Calcolare $P(X > 0 | Y > 0)$.
- (n) Calcolare $P(X \cdot Y > 0)$.

Soluzioni

$$(a) f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$(b) f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } -1 < y < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$(c) F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -1 \\ \frac{x+1}{2} & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$(d) F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < -1 \\ \frac{y+1}{2} & \text{se } -1 \leq y < 1 \\ 1 & \text{se } y \geq 1 \end{cases}$$

(e) $X \sim \text{Unif}(-1, 1)$, $Y \sim \text{Unif}(-1, 1)$.

(f) $\mathbb{E}[Y] = 0$, $P(Y > 0) = \frac{1}{2}$.

(g) Non sono indipendenti. Se fossero indipendenti per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ dovrebbe valere l'uguaglianza $f_X(x) \cdot f_Y(y) = f_{(X,Y)}(x, y)$, mentre in generale l'uguaglianza è falsa nel quadrato Q .

(h) $\mathbb{E}[XY] = \frac{1}{9}$.

(i) $\text{COV}[X, Y] = \frac{1}{9}$.

(l) $P(X > 0, Y > 0) = \frac{5}{16}$.

(m) $P(X > 0 | Y > 0) = \frac{5}{8}$.

(n) $P(X \cdot Y > 0) = \frac{5}{8}$.

Esercizio 3

Siano X , Y e Z tre variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che X sia una v.a. normale di media 1 e varianza 4, Y sia una v.a. binomiale di parametri $n = 3$ e $p = \frac{1}{3}$ e Z sia una v.a. discreta con distribuzione data da $P(Z = 1) = \frac{1}{6}$, $P(Z = -2) = \frac{2}{6}$ e $P(Z = 3) = \frac{3}{6}$. Siano infine $T := Y \cdot Z$ e $W := \max\{X, T\}$.

- (a) Calcolare $\mathbb{E}[Z]$.
- (b) Calcolare $\mathbb{E}[Z^2]$.
- (c) Calcolare $\text{VAR}[Z]$.
- (d) Calcolare $\mathbb{E}[T]$.
- (e) Calcolare $\mathbb{E}[T^2]$.
- (f) Calcolare $\text{VAR}[T]$.
- (g) Calcolare $P(T > -1)$.
- (h) Calcolare $P(T > 0)$.
- (i) Calcolare $P(T > 1)$.
- (l) Calcolare $P(W > 0)$.
- (m) Calcolare $\mathbb{E}[X \cdot Y \cdot T \cdot Z]$

Soluzioni

(a) 1, (b) 6, (c) 5, (d) 1, (e) 10, (f) 9, (g) $\frac{62}{81}$, (h) $\frac{38}{81}$, (i) $\frac{32}{81}$, (l) $1 - \frac{43}{81} \cdot \Phi(-\frac{1}{2}) \simeq 0.8362$, (m) 10