Esercitazione del 31/01/2012
Istituzioni di Calcolo delle Probabilità

Esercizio 1 Vengono lanciati due dadi regolari a 6 facce.
(a) Calcolare la probabilità che la somma dei valori ottenuti sia 9?
(b) Calcolare la probabilità che la somma dei valori ottenuti sia maggiore di 9?
(c) Calcolare la probabilità che almeno uno dei due dadi abbia dato un risultato maggiore di 4?
(d) Calcolare la probabilità che la somma dei risultati dei due dati sia maggiore di 9 sapendo che c'è almeno un dado con risultato maggiore di 4.

Svolgimento:

Ci sono 6 esiti possibili per il primo dado e 6 esiti possibili per il secondo dado. Quindi per il principio fondamentale del calcolo combinatorio per la coppia di risultati dei due dadi ci sono $6 \cdot 6 = 36$ esiti possibili. Infine l'ipotesi "dadi regolari" ci assicura che tutti e 36 gli esiti sono equiprobabili.
Se consideriamo le somme abbiamo il seguente schema:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Per rispondere alle domande (a), (b), (c) e (d) è sufficiente calcolare il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili.

(a) Evidenziando in rosso i casi favorevoli si ricava:

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

$P(\text{somma dei dadi uguale a 9}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
(b)

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

$P(\text{somma dei dadi maggiore di } 9) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
(c)

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

$P(\text{Almeno uno dei due dadi è maggiore di } 4) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$
(d)

				6	7
				7	8
				8	9
				9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

$P(\text{Somma dei dadi maggiore di } 9 | \text{Almeno uno dei due dadi è maggiore di } 4) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

Esercizio 2
`Calcolo delle Probabilità 03/11/2009`

Da un mazzo di 52 carte vengono estratte 3 carte.
(a) Qual è la probabilità che vi sia almeno una carta inferiore (strettamente) a 3?

Soluzione: $1 - \frac{44 \cdot 43 \cdot 42}{52 \cdot 51 \cdot 50}$

Esercizio 3 Una mensa universitaria offre 5 diversi primi, 4 diversi secondi e 3 diverse bibite. Supponiamo che ciascuno studente scelga in maniera casuale e indipendente un primo, un secondo ed una bibita.
(a) Scelti due studenti, qual è la probabilità che abbiano fatto la stessa ordinazione (stesso primo, stesso secondo e stessa bibita)?
(b) In un tavolo di dieci persone, qual è la probabilità che ci siano almeno due persone che hanno fatto la stessa ordinazione?
(c) Per festeggiare l'inizio dell'anno accademico viene offerto agli studenti un bicchiere di vino rosso o bianco a scelta. Da una statistica risulta che tra coloro che hanno scelto un secondo di carne il 70% sceglie il vino rosso e il 30% il vino bianco, viceversa tra coloro che hanno scelto il secondo di pesce il 70% sceglie il vino bianco e il 30% sceglie quello rosso. Sapendo che ci sono tre secondi di carne e uno di pesce e supponendo che ciascuno studente sceglie il proprio secondo in maniere casuale tra i 4 piatti possibili qual è la probabilità che uno studente che beve vino rosso abbia scelto il secondo di carne?

Svolgimento:

(a) Le combinazioni possibili di primo, secondo e bibita sono $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Per la casualità e l'indipendenza delle scelte si ha che ciascuna delle possibili combinazioni di primo, secondo e bibita ha probabilità $1/60$.
Indichiamo con i numeri da 1 a 60 le possibili ordinazioni e chiamiamo X_1 e X_2 le ordinazioni del primo e del secondo studente. Bisogna calcolare $P(X_1 = X_2)$.

$$P(X_1 = X_2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) + P(X_1 = 2, X_2 = 2) + \cdots + P(X_1 = 60, X_2 = 60)$$

$$P(X_1 = X_2) = \frac{1}{3600} + \frac{1}{3600} + \cdots + \frac{1}{3600}$$

$$P(X_1 = X_2) = \frac{1}{60}$$

Dunque la probabilità che due persone abbiano ordinato le stesse cose è $1/60$.
(b) Consideriamo l'evento $A :=$ "ci sono almeno due persone con la stessa ordinazione e l'evento $B := A^c =$ "tutte e dieci le persone hanno fatto ordinazioni diverse". Allora si ha $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(B)$. Per calcolare $\mathbb{P}(B)$ è sufficiente calcolare il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili.
"Casi favorevoli"$= 60 \cdot 59 \cdot \ldots \cdot 51$
"Casi possibili"$= 60^{10}$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{60 \cdot 59 \cdot \ldots \cdot 51}{60^{10}}$$

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{60 \cdot 59 \cdot \ldots \cdot 51}{60^{10}}$$

(c) Denotiamo con A_1 A_2 ed E gli eventi:
$A_1 :=$ "È stato scelto un secondo di carne"
$A_2 :=$ "È stato scelto un secondo di pesce"
$E :=$ "È stato scelto del vino rosso".
Le ipotesi sono:

$$P(A_1) = \frac{3}{4} \qquad P(A_2) = \frac{1}{4} \qquad P(E|A_1) = 0.7 \qquad P(E|A_2) = 0.3$$

La tesi è calcolare

$$P(A_1|E)$$

Dalla formula di Bayes

$$P(A_1|E) = \frac{P(A_1)P(E|A_1)}{P(A_1)P(E|A_1) + P(A_2)P(E|A_2)} = \frac{7}{8} = 87.5\%$$

Esercizio 4

`Calcolo delle Probabilità 18/12/2010`

Ci sono 10 monetine di cui 5 con due teste, 2 con due croci e 3 regolari (una

moneta regolare ha una faccia testa e una faccia croce e la probabilità che esca testa è uguale a quella che esca croce).
(a) Se vengono lanciate tutte e dieci le monete, qual è la probabilità che ci siano più teste che croci.
(b) Scelta una moneta a caso ed effettuato un lancio, qual è la probabilità che dia croce.
(c) Scelta una moneta a caso ed effettuato un lancio, qual è la probabilità che sia una moneta regolare sapendo che il risultato del lancio è croce.
(d)* Scelgo una moneta a caso ed effettuo 100 lanci, stimare la probabilità che si realizzino più di 60 teste. `(Lancio sempre la stessa moneta.)`

Soluzione: (a) $\frac{7}{8}$, (b) $\frac{7}{20}$, (c) $\frac{3}{7}$, (d) $\frac{1}{2} + \frac{3}{10}(1 - \Phi(2.1)) \simeq 0.50536$

Esercizio 5
`Istituzioni di Calcolo delle Probabilità 01/07/2011`
`Se possibile, indicare i risultati sotto forma di frazioni`

Consideriamo due mazzi di carte. Il primo mazzo (A) è costituito da 6 carte con i numeri $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mentre il secondo mazzo (B) è costituito da 8 carte con i numeri $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Scegliamo un mazzo a caso e estraiamo una carta a caso dal mazzo.

(a) Qual è la probabilità che la carta estratta sia un 2?

(b) Qual è la probabilità che la carta estratta sia un 10?

(c) Qual è la probabilità che la carta estratta sia un 4?

(d) Qual è la probabilità che la carta estratta sia minore (stretto) di 5?

(e) Sapendo che la carta estratta è un 3, qual è la probabilità che sia stata estratta dal mazzo A?

(f) Sapendo che la carta estratta è minore (stretto) di 5, qual è la probabilità che sia stata estratta dal mazzo A?

(g)* Sia X_A il valore di una carta estratta a caso dal mazzo A. Quanto vale $\mathbb{E}[X_A]$?

(h)* Sia X_B il valore di una carta estratta a caso dal mazzo B. Quanto vale $\mathbb{E}[X_B]$?

(i)* Scegliamo un mazzo a caso ed estraiamo una carta a caso. Indichiamo con X il valore della carta. Quanto vale $\mathbb{E}[X]$?

Soluzione: (a) $\frac{1}{12}$, (b) $\frac{1}{16}$, (c) $\frac{7}{48}$, (d) $\frac{11}{24}$, (e) $\frac{4}{7}$, (f) $\frac{8}{11}$, (g) $\frac{7}{2}$, (h) $\frac{13}{2}$, (i) 5.

Esercizio 6

`Calcolo delle Probabilità 02/07/2011`

Consideriamo due urne ed una moneta truccata. La prima urna (urna A) contiene 2 palline rosse e 4 bianche, la seconda urna (urna B) contiene una pallina rossa, una bianca e una nera. Mentre la moneta truccata ha una probabilità p ($p \in [0,1]$) di dare testa e una probabilità $1-p$ di dare croce. Lanciamo la moneta, se esce testa estraiamo una pallina dall'urna A se esce croce estraiamo una pallina dall'urna B.

(a) Calcolare la probabilità che la pallina estratta sia nera? (`Il risultato dipende dal parametro` p`.`)

(b) Calcolare la probabilità che la pallina estratta sia rossa?

(c) Qual è la probabilità che la moneta abbia dato testa sapendo che la pallina estratta è bianca?

(d) Per quali valori di p la probabilità di estrarre una pallina bianca è $\frac{1}{2}$?

(e) Per quali valori di p la probabilità di estrarre una pallina rossa è $\frac{1}{3}$?

(f) Per quali valori di p la probabilità di estrarre una pallina nera è $\frac{1}{4}$?

Svolgimento:

Consideriamo i seguenti eventi:

$T =$"Il risultato del lancio della moneta è testa";

$A =$"La moneta viene estratta dall'urna A";

$B =$"La moneta viene estratta dall'urna B";

$R =$"La pallina estratta è Rossa";

$N =$"La pallina estratta è Nera";

$B_i =$"La pallina estratta è Bianca";

Le ipotesi della traccia diventano: $A = T$, $B = T^c$, $P(A) = p$, $P(B) = 1-p$, $P(R|A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(B_i|A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $P(N|A) = 0$, $P(R|B) = \frac{1}{3}$, $P(B_i|B) = \frac{1}{3}$, $P(N|B) = \frac{1}{3}$.

(a) $P(N) = P(N|A) \cdot P(A) + P(N|B) \cdot P(B) = \frac{1-p}{3}$

(b) $P(R) = P(R|A) \cdot P(A) + P(R|B) \cdot P(B) = \frac{1}{3}$

(c) $P(B_i) = P(B_i|A) \cdot P(A) + P(B_i|B) \cdot P(B) = \frac{1+p}{3}$

Utilizzando Bayes $P(T|B_i) = \frac{P(B_i|T) \cdot P(T)}{P(B_i|T) \cdot P(T) + P(B_i|T^c) \cdot P(T^c)} = \frac{2p}{p+1}$

(d) $\frac{1+p}{3} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{1}{2}$

(e) $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \qquad \forall p \in [0,1]$

(f) $\frac{1-p}{3} = \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{1}{4}$