Esercitazione del 07/02/2012
Istituzioni di Calcolo delle Probabilità

David Barbato

Esercizio 1
Vengono lanciati due dadi a 6 facce regolari. Calcolare le seguenti probabilità.

(a) Qual è la probabilità che siano entrambi pari?
(b) Qual è la probabilità che ci sia almeno un 5?
(c) Calcolare la probabilità che la somma sia 5.
(d) Calcolare la probabilità che la somma sia minore o uguale a 8.
(e) Calcolare la probabilità che siano entrambi minori di 6.
(f) Sapendo che la somma è uguale a 7 calcolare la probabilità che ci sia almeno un 2.
(g) Sapendo che la somma è minore o uguale a 7 calcolare la probabilità che ci sia almeno un 2.

Soluzione: (a) $\frac{1}{4}$, (b) $\frac{11}{36}$, (c) $\frac{1}{9}$, (d) $\frac{13}{18}$, (e) $\frac{25}{36}$, (f) $\frac{1}{3}$, (g) $\frac{3}{7}$,

Esercizio 2
Viene lanciata 8 volte una moneta regolare. Calcolare le seguenti probabilità.
(a) Qual è la probabilità che i primi due lanci siano testa?
(b) Qual è la probabilità che il terzo lancio sia croce?
(c) Qual è la probabilità che i primi 4 lanci siano testa?
(d) Qual è la probabilità che nei primi 3 lanci ci sia almeno una testa e almeno una croce?
(e) Qual è la probabilità che tutti e 8 i lanci diano lo stesso esito?
(f) Sapendo che i primi 3 lanci hanno dato testa, qual è probabilità che tutti e 8 i lanci abbiano dato testa?
(g) Sapendo che il terzo lancio ha dato croce, qual è probabilità che tutti e 8 i lanci abbiano dato testa?
(h) Qual è la probabilità che nei primi 5 lanci ci siano 2 teste e 3 croci (in qualsiasi ordine)?
(i) Sapendo che tra i primi 2 lanci vi è almeno una testa, qual è la probabilità che tra i primi 2 lanci vi è almeno una croce?
(l) Sapendo che nei primi 3 lanci vi è almeno una testa, qual è la probabilità che il primo lancio abbia dato testa?

Soluzione: (a) $\frac{1}{4}$, (b) $\frac{1}{2}$, (c) $\frac{1}{16}$, (d) $\frac{3}{4}$, (e) $\frac{1}{128}$, (f) $\frac{1}{32}$, (g) 0, (h) $\frac{5}{16}$, (i) $\frac{2}{3}$, (l) $\frac{4}{7}$,

Esercizio 3
Viene lanciato un dado regolare (a 6 facce) e poi viene lanciata una moneta regolare tante volte quanto il risultato del lancio del dado. Calcolare le

seguenti probabilità.
(a) Qual è la probabilità che la moneta sia lanciata 3 volte.(esattamente 3 volte)
(b) Qual è la probabilità che la moneta sia lanciata almeno 3 volte.
(c) Qual è la probabilità che il primo lancio dia "testa"?
(d) Qual è la probabilità che l'ultimo lancio dia "croce"?
(e) Se supponiamo di sapere che il risultato del dado sia "3", qual è la probabilità che sia uscita "testa" 3 volte?
(f) Qual è la probabilità che il dado abbia dato "3" e sia uscita "testa" 3 volte?
(g) Se supponiamo di sapere che il dado ha dato "4", qual è la probabilità che si sia uscita due volte "testa" e due volte "croce"?
(h) Qual è la probabilità che non si ottenga mai "testa"?
(i) Qual è la probabilità che non si ottenga mai "testa", sapendo che il dado ha dato un esito minore di 3?
(l) Qual'è la probabilità che il numero di "teste" sia maggiore del numero di "croci"?

Soluzione: (a) $\frac{1}{6}$, (b) $\frac{2}{3}$, (c) $\frac{1}{2}$, (d) $\frac{1}{2}$, (e) $\frac{1}{8}$, (f) $\frac{1}{48}$, (g) $\frac{3}{8}$, (h) $\frac{63}{384}$, (i) $\frac{3}{8}$, (l) $\frac{77}{192}$,

Esercizio 4
Un contadino si affida alla previsioni metereologiche secondo le quali vi è una probabilità dell' 70% che la prossima settimana piova. Lui sa che se concimerà il suo campo, allora ci saranno un 60% di piante che seccheranno in caso che non piova mentre tale probabilità scende al 10% in caso di pioggia. Se invece decide di non concimare il suo campo ci saranno un 30% di piante che seccheranno nel caso che non piova e un 20% in caso di pioggia.
(a) Se decide di concimare il suo terreno, qual è la percentuale media di piantine che sopravviveranno?
(b) Cosa gli conviene fare se vuole massimizzare il numero medio di piantine che non seccheranno?

Soluzione: (a) 75%, (b) Se decide di non concimare la percentuale media di piantine che sopravviveranno è del 77% dunque se vuole massimizzare la percentuale media di piantine che sopravviveranno gli conviene non concimare.

Esercizio 5
Vengono lanciati due dadi a 6 facce regolari. Calcolare le seguenti probabilità.

(a) Qual è la probabilità che siano entrambi dispari?
(b) Qual è la probabilità che ci sia almeno un 2?
(c) Calcolare la probabilità che la somma sia 2.
(d) Calcolare la probabilità che la somma sia minore o uguale a 5.
(e) Calcolare la probabilità che siano entrambi minori di 3.

(f) Sapendo che la somma è uguale a 6 calcolare la probabilità che ci sia almeno un 2.
(g) Sapendo che la somma è minore o uguale a 6 calcolare la probabilità che ci sia almeno un 2.

Soluzione: (a) $\frac{1}{4}$, (b) $\frac{11}{36}$, (c) $\frac{1}{36}$, (d) $\frac{5}{18}$, (e) $\frac{1}{9}$, (f) $\frac{2}{5}$, (g) $\frac{7}{15}$.

Esercizio 6 È noto che la probabilità che un uomo sia daltonico è del 7%, mentre la probabilità che una donna sia daltonica è solo dello 0.5%. Considerato un gruppo di 30 persone costituito da 10 uomini e 20 donne scelti a caso:
(a) Qual è la probabilità che nel gruppo non ci siano persone daltoniche?
(b) Qual è la probabilità che nel gruppo ci siano esattamente un uomo daltonico e nessuna donna daltonica?
(c) Indichiamo con Z il numero totale di persone daltoniche del gruppo. Qual è il valor medio di Z?
(d) Scelta a caso una persona nel gruppo, qual è la probabilità che sia un uomo sapendo che si tratta di una persona daltonica?

Svolgimento:
Siano X_1, ... ,X_{20} variabili aleatorie associate alle 20 donne con $X_i = 1$ se la i-esima donna è daltonica e $X_i = 0$ se la i-esima donna non è daltonica.
Siano Y_1, ... ,Y_{10} variabili aleatorie con $Y_i = 1$ se l'i-esimo uomo è daltonico e $Y_i = 0$ se l'i-esimo uomo non è daltonico.
Le X_i e Y_i costituiscono una famiglia di variabili aleatorie indipendenti con distribuzione bernoulliana, le X_i sono bernoulliane di parametro $p_1 = 0.005$ mentre le Y_i sono bernoulliane di parametro $p_2 = 0.07$
(a)

$$\begin{aligned}
&P(\text{"non ci sono persone daltoniche nel gruppo"}) = \\
&= P(X_1 = 0, ..., X_{20} = 0, Y_1 = 0, ..., Y_{10} = 0) = \\
&= P(X_1 = 0) \cdot ... \cdot P(X_{20} = 0) \cdot P(Y_1 = 0) \cdot ... \cdot P(Y_{10} = 0) = \\
&= (1 - 0.005)^{20} \cdot (1 - 0.07)^{10} \simeq 0.4378
\end{aligned}$$

(b) Indichiamo con X e Y rispettivamente il numero totale di donne e uomini daltonici del gruppo, cioè $X = X_1 + ... + X_{20}$ e $Y = Y_1 + ... + Y_{10}$. Le variabili X, Y quali somme di variabili aleatorie bernoulliane indipendenti sono variabili aleatorie con distribuzion binomiale, $X \sim Bin(0.005, 20)$ e $Y \sim Bin(0.07, 10)$
La probabilità che nel gruppo ci siano esattamente un uomo daltonico e nessuna donna daltonica è $P(X = 0, Y = 1)$.

$$\begin{aligned}
&P(X = 0, Y = 1) = P(X = 0) \cdot P(Y = 1) \\
&P(X = 0) = \binom{20}{0} \cdot (1 - 0.005)^{20} = 0.9046 \\
&P(Y = 1) = \binom{10}{1} \cdot (1 - 0.07)^{9} \cdot 0.07^{1} = 0.3643 \\
&P(X = 0, Y = 1) \simeq 0.33
\end{aligned}$$

(c) $E[Z] = E[X + Y] = E[X] + E[Y] = 20 * 0.005 + 10 * 0.07 = 0.8$

(d) Denotiamo con F (risp. M) l'evento la persona scelta a caso è una donna (risp. un uomo), denotiamo con D l'evento si tratta di una persona daltonica. Dalle ipotesi si ha: $P(F) = \frac{2}{3}$, $P(M) = \frac{1}{3}$, $P(D|F) = 0.005$, $P(D|M) = 0.07$ Per calcolare $P(M|D)$ utilizziamo la formula di Bayes.

$$P(M|D) = \frac{P(D|M) \cdot P(M)}{P(D|M) \cdot P(M) + P(D|F) \cdot P(F)} = \frac{0.07 \cdot \frac{1}{3}}{0.07 \cdot \frac{1}{3} + 0.005 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{7}{8}$$

Esercizio 7

`Istituzioni di Calcolo delle Probabilità 01/09/2011`

`Se possibile, indicare i risultati sotto forma di frazioni`

Alessia e Daniele possiedono due dadi a sei facce. Il dado di Daniele è regolare mentre quello di Alessia è truccato. Indichiamo con A il risultato del lancio del dado di Alessia e con D il risultato del lancio del dado di Daniele. Supponiamo infine che il dado di Alessia abbia la seguente distribuzione: $P(A = 6) = 0.3$, $P(A = 5) = 0.2$, $P(A = 4) = 0.2$, $P(A = 3) = 0.1$, $P(A = 2) = 0.1$, $P(A = 1) = 0.1$.

(a) Calcolare $P(A > 3)$.

(b) Calcolare $\mathbb{E}[A]$.

(c) Calcolare $P(D > 3)$.

(d) Calcolare $P(A = 6, D = 6)$.

(e) Calcolare $P(A = 5, D = 4)$.

(f) Calcolare $P(A > 3, D > 3)$.

(g) Calcolare $P(A = 6|A > 3)$.

(h) Calcolare $P(A = 6|D > 3)$.

(i) Calcolare $P(A + D = 11)$.

(l) Calcolare $P(A \cdot D > 20)$.

(m) Calcolare $P(A > D)$.

(n) Calcolare $P(A = 6|A > D)$.

Soluzione:

	A	L	E	S	S	I	A
D		1	2	3	4	5	6
A	1	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{3}{60}$
N	2	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{3}{60}$
I	3	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{3}{60}$
E	4	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{3}{60}$
L	5	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{3}{60}$
E	6	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{3}{60}$

(a) $\frac{7}{10}$, (b) $\frac{21}{5}$, (c) $\frac{1}{2}$, (d) $\frac{1}{20}$, (e) $\frac{1}{30}$, (f) $\frac{7}{20}$, (g) $\frac{3}{7}$, (h) $\frac{3}{10}$, (i) $\frac{1}{12}$, (l) $\frac{1}{4}$, (m) $\frac{8}{15}$, (n) $\frac{15}{32}$

Esercizio 8

`Calcolo delle Probabilità 13/01/2011`

Una società costruisce microprocessori. Un microprocessore può presentare 2 tipi di malfunzionamenti, (indipendenti e sovrapponibili).
I malfunzionamenti di tipo 1 hanno probabilità $p_1 = 4\%$
I malfunzionamenti di tipo 2 hanno probabilità $p_2 = 0.5\%$
Inoltre la società effettua un test sui processori prodotti in grado di individuare un malfunzionamento di tipo 1 con una probabilità del 95%.
(a) Qual è la probabilità che un microprocessore presenti entrambi i tipi di malfunzionamento?
(b) Qual è la probabilità che un microprocessore superi il test?
(c) Sapendo che un microprocessore ha superato il test, qual è la probabilità che non presenti malfunzionamenti.
(d) Su mille microprocessori che hanno superato il test qual è il numero medio di microprocessori malfunzionanti?
(e)* Su mille microprocessori che hanno superato il test (stimare) qual è la probabilità che ce ne siano più di 10 malfunzionanti?
Soluzione: (a) $\frac{1}{5000}$, (b) 96.2%, (c) $\frac{96 \cdot 995}{100 \cdot 962} \simeq 0.99293$ (d) $\simeq 7.07$
(e) $\simeq 1 - \Phi(1.29) \simeq 9.85\%$