

Esercitazione del 28/02/2012

Istituzioni di Calcolo delle Probabilità

David Barbato
barbato@math.unipd.it

Esercizio 1. Sia X una v.a. aleatoria assolutamente continua con densità f_X data da

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ cxe^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

- (a) Determinare la costante c .
- (b) Determinare la funzione di ripartizione F_X .
- (c) Determinare la funzione di rischio di F_X .
- (d) A quale distribuzione (tra quelle viste a lezione) appartiene la distribuzione di X ? Indicare i parametri della distribuzione.
- (e) Calcolare $\mathbb{E}[X]$ e $\text{Var}[X]$. (Utilizzare il risultato del quesito (d).)

Esercizio 2. Sia X una v.a. aleatoria assolutamente continua con densità f_X data da

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\alpha-x}{2} & 0 \leq x < \alpha \\ 0 & \alpha \leq x \end{cases}$$

con $\alpha > 0$.

- (a) Determinare α .
- (b) Determinare la funzione di ripartizione F_X .
- (c) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.
- (d) Determinare la funzione di rischio di F_X .
- (e+) Sia Y una v.a. uniforme sull'intervallo $(0, 1)$, trovare una funzione g da $(0, 1)$ in $\mathbb{R}$ non decrescente tale che posto $Z = g(Y)$ si abbia $Z \sim X$.
- (f) Calcolare $\mathbb{E}[g(Y)]$, utilizzando la formula per il calcolo di una funzione di variabile aleatoria assolutamente continua. (Verificare che $\mathbb{E}[g(Y)] = \mathbb{E}[X]$)

Esercizio 3. Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo inoltre che X abbia una distribuzione bernoulliana di parametro $p = \frac{1}{2}$ e che Y abbia invece una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 3$. Sia infine

$Z = X + Y$ e $T = X \cdot Y$.

- (a) Calcolare il valore atteso di Z e di T .
- (b) Calcolare la funzione di ripartizione di Z .
- (c) Calcolare la funzione di ripartizione di T .
- (d) Calcolare $P(Z > 2T)$.

Esercizio 4. Siano X_1, X_2 e X_3 tre variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo inoltre che X_1 abbia una distribuzione binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ di parametri $p = \frac{1}{2}$ e $n = 2$ che X_2 abbia una distribuzione normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ di parametri $\mu = 1$ e $\sigma = 1$ e che X_3 abbia invece una distribuzione di Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ di parametro $\lambda = 1$. Siano infine $T = X_1 + X_2 + X_3$, $Z = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$ e $W = \max(X_1, X_2, X_3)$.

- (a) Calcolare il valore atteso e varianza di T .
- (b) Calcolare il valore atteso e varianza di Z (utilizzare la formula $\text{VAR}(Z) = \mathbb{E}[Z^2] - (\mathbb{E}[Z])^2$).
- (c) Calcolare $P(W < \frac{1}{2})$.
- (d) Calcolare $\mathbb{E}[(X_1 + X_2) \cdot (X_2 + X_3)]$.

Esercizio 5. Siano X_1, X_2 e X_3 tre variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo inoltre che X_1 abbia una distribuzione bernoulliana di parametro $p = \frac{1}{3}$ che X_2 abbia una distribuzione binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ di parametri $p = \frac{1}{2}$ e $n = 3$ che X_3 abbia una distribuzione normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ di parametri $\mu = 1$ e $\sigma = 2$. Siano infine $T = X_1 + 2X_2 + 3X_3$, $Z = \max(X_1, X_2, X_3)$.

- (a) Calcolare il valore atteso e la varianza di T .
- (b) Calcolare $P(X_3 < X_1)$.
- (c) Calcolare $P(Z > \frac{1}{2})$.
- (d) Calcolare $\mathbb{E}[\frac{1}{1+X_2}]$.

Esercizio 6. Sia $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $p = \frac{1}{2}$ e $\lambda = \frac{1}{2}$. Siano X_1, X_2 e X_3 tre variabili aleatorie indipendenti. Sia X_1 v.a. con distribuzione binomiale di parametri $(3, p)$. Sia X_2 v.a. con $P(X_2 = x_1) = p$ e $P(X_2 = x_2) = 1 - p$. Sia X_3 v.a. con distribuzione esponenziale di parametro λ . Siano infine $T = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$ e $Z = X_2 + X_3$.

- (a) Calcolare media e varianza di T .
- (b) Calcolare $\mathbb{E}[e^{X_1+X_2}]$.
- (c) Calcolare $P(Z \leq 1)$, $P(Z \leq 3)$ e $P(Z \leq 5)$.
- (d) Calcolare F_Z .

Esercizio 7. Siano X_1, X_2 e X_3 tre variabili aleatorie indipendenti.

Sia X_1 v.a. con distribuzione bernoulliana di parametro $p = \frac{1}{4}$.

Sia X_2 v.a. con distribuzione normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ di parametri $\mu = 5$ e $\sigma = 3$.

Sia X_3 una variabile aleatoria discreta a valori in $\{4, 7\}$ con $P(X_3 = 4) = \frac{1}{3}$

e $P(X_3 = 7) = \frac{2}{3}$.

Siano infine $T = 2 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$ e $Z = \max(X_1, X_2, X_3)$.

- (a) Calcolare media, varianza e momento del secondo ordine di X_3 .
- (b) Calcolare media e varianza di T .
- (c) Calcolare $P(Z > 6)$.
- (d) Calcolare $\mathbb{E}[(X_1 - X_2) \cdot (X_1 + X_2)]$.

Esercizio 8. Siano X_1 , X_2 e X_3 tre variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo inoltre che X_1 abbia una distribuzione bernoulliana di parametro $p = \frac{1}{4}$ che X_2 abbia una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda_1 = 2$ e che X_3 abbia una distribuzione di Poisson di parametro $\lambda_2 = 3$. Siano infine $T = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$, $Z = X_1 + X_2 + X_3$ e $W = \min\{X_1, X_2\}$.

- (a) Calcolare il valore atteso e la varianza di T .
- (b) Calcolare $P(Z < \frac{1}{2})$.
- (c) Calcolare la funzione di ripartizione di W .
- (d) Calcolare $\mathbb{E}[e^{X_2}]$.

Esercizio 9. Sia X_1 , X_2 e X_3 tre variabili aleatorie indipendenti. Sia X_1 v.a. con distribuzione uniforme su $(0, 4)$. Sia X_2 v.a. normale di media $\mu = 3$ e varianza $\sigma^2 = 4$. Sia X_3 v.a. con distribuzione bernoulliana di parametro $p = \frac{1}{2}$. Siano infine $Z = X_1 + X_2 + 7 \cdot X_3$ e $W = \max(X_1, X_3)$.

- (a) Calcolare media e varianza di Z .
- (b) Calcolare $\mathbb{E}[X_1]$, $\mathbb{E}[X_2^2]$, $\mathbb{E}[X_3^3]$.
- (c) Calcolare $\mathbb{E}[X_3 \cdot (X_3 + 1) \cdot (X_3 + X_2)]$.
- (d) Calcolare $P(X_3 > X_1)$.
- (e) Calcolare F_W .

Esercizio 10. Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti e sia $Z := \min\{X, Y\}$. Supponiamo inoltre che X sia discreta con $P(X = 1) = \frac{1}{2}$, $P(X = 2) = \frac{1}{3}$ e $P(X = 3) = \frac{1}{6}$ mentre Y sia una variabile aleatoria continua con densità f_Y :

$$f_Y(y) := \begin{cases} \frac{2 \cos(y) + 5 \sin(y)}{7} & y \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & y \notin (0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

- (a) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.

- (b) Calcolare $\mathbb{E}[X^2]$.

- (c) Calcolare $\text{VAR}[X]$.

(d) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.

(e) Calcolare $\mathbb{E}[Y^2]$.

(f) Calcolare $\text{VAR}[Y]$.

(g) Calcolare F_X . Scrivere tutti i passaggi.

(h) Calcolare F_Y . Scrivere tutti i passaggi.

(i) Calcolare $P(X < Y)$. Scrivere tutti i passaggi.

(l) Calcolare F_Z . Scrivere tutti i passaggi.

Esercizio 11. Siano X , Y e Z tre variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che X sia Poissoniana di parametro $\lambda = 3$, Y sia Binomiale di parametri $n = 2$ e $p = \frac{1}{2}$, mentre Z ha distribuzione normale di media $\mu = 0$ e varianza $\sigma^2 = 1$.

(a) Calcolare $\mathbb{E}[X + Y - Z]$.

(b) Calcolare $\mathbb{E}[XYZ]$.

(c) Calcolare $\mathbb{E}[X^2 + Y^2 + Z^2]$.

(d) Calcolare $\mathbb{E}[(X + Y)^2]$.

(e) Calcolare $P(X + Y = 0)$.

(f) Calcolare $P(X \cdot Y = 0)$.

(g) Calcolare $P(Y \cdot Z = 0)$.

(h) Calcolare $P(Y \cdot Z > 0)$.

(i) Calcolare $\mathbb{E}[Y^6]$. Scrivere tutti i passaggi.

(l) Calcolare $P[X = Y]$. Scrivere tutti i passaggi.

(m) Calcolare $P(Z > Y)$. Scrivere tutti i passaggi. (Utilizzare $\phi(0) = 0.5$, $\phi(1) = 0.84134$ e $\phi(2) = 0.97725$)

Esercizio 12. Siano X , Y e Z tre variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che X sia esponenziale di parametro $\lambda = 2$, Y sia uniforme sull'intervallo $(0, 10)$, mentre Z ha distribuzione discreta con $P(Z = -1) = \frac{1}{4}$, $P(Z = 0) = \frac{1}{2}$ e $P(Z = +1) = \frac{1}{4}$.

- (a) Calcolare $\mathbb{E}[X + Y + Z]$.
- (b) Calcolare $\mathbb{E}[XYZ]$.
- (c) Calcolare $\mathbb{E}[Z^2]$.
- (d) Calcolare $\text{VAR}[Z]$.
- (e) Calcolare $\mathbb{E}[(X + Z)^2]$.
- (f) Calcolare $\mathbb{E}[e^Z]$.
- (g) Calcolare $\mathbb{E}[e^{X+Z}]$.
- (h) Calcolare $P(Y < Z)$.
- (i) Calcolare $\mathbb{E}[\cos(\pi Z)]$.
- (l) Calcolare $P(YZ > 2)$.

Soluzioni

Esercizio 1

- (a) $c = 1$
- (b)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-x} - xe^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

- (c) $h(t) = \frac{t}{1+t}$ per ogni $t \geq 0$
- (d) $X \sim \text{Gamma}(\alpha = 2, \lambda = 1)$
- (e) $\mathbb{E}[X] = 2, \text{VAR}[X] = 2$.

Esercizio 2

- (a) $\alpha = 2$
- (b)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x - \frac{x^2}{4} & 0 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

- (c) $\mathbb{E}[x] = \frac{2}{3}$
- (d) $h(t) = \frac{2}{2-t}$ per ogni $t \in (0, 2)$
- (e) $g(y) = 2 - \sqrt{4 - 4y}$ per ogni $y \in (0, 1)$

Esercizio 3

- (a) $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = p + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$
- $\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = p \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Dove la seconda uguaglianza segue dall'indipendenza di X e Y .

(b)

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(Z \leq z, X = 0) + P(Z \leq z, X = 1) \\ &= P(X + Y \leq z, X = 0) + P(X + Y \leq z, X = 1) \\ &= P(Y \leq z, X = 0) + P(1 + Y \leq z, X = 1) \\ &= P(Y \leq z, X = 0) + P(Y \leq z - 1, X = 1) \\ &= P(Y \leq z) \cdot P(X = 0) + P(Y \leq z - 1) \cdot P(X = 1) \\ &= F_Y(z) \cdot 0.5 + F_Y(z - 1) \cdot 0.5 \end{aligned}$$

Sapendo che Y è esponenziale di parametro 3, si ha

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 - e^{-3y} & y > 0 \end{cases}$$

e dunque considerando i tre casi, $z < 0$, $0 \leq z < 1$ e $z \geq 1$.

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 0.5 \cdot (1 - e^{-3z}) & 0 \leq z < 1 \\ 0.5 \cdot (1 - e^{-3z}) + 0.5 \cdot (1 - e^{-3(z-1)}) & z \geq 1 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(T \leq t) = P(T \leq t, X = 0) + P(T \leq t, X = 1) \\ &= P(X \cdot Y \leq t, X = 0) + P(X \cdot Y \leq t, X = 1) \\ &= P(0 \leq t, X = 0) + P(Y \leq t, X = 1) \\ &= P(0 \leq t) \cdot P(X = 0) + P(Y \leq t) \cdot P(X = 1) \\ &= P(t \geq 0) \cdot 0.5 + F_Y(t) \cdot 0.5 \end{aligned}$$

considerando i due casi, $t < 0$, e $t \geq 0$ si ha:

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 0.5 + 0.5 \cdot (1 - e^{-3t}) & t \geq 0 \end{cases}$$

(d)

$$\begin{aligned} P(Z > 2T) &= P(X + Y > 2X \cdot Y) \\ &= P(X + Y > 2X \cdot Y, X = 0) + P(X + Y > 2X \cdot Y, X = 1) \\ &= P(Y > 0, X = 0) + P(1 + Y > 2Y, X = 1) \\ &= P(Y > 0) \cdot P(X = 0) + P(Y < 1) \cdot P(X = 1) \\ &= 1 \cdot 0.5 + (1 - e^{-3}) \cdot 0.5 \\ &= 1 - 0.5 \cdot e^{-3} \end{aligned}$$

Esercizio 4

$$\mathbb{E}[X_1] = np = 1 \quad \text{VAR}(X_1) = np(1-p) = \frac{1}{2} \quad \mathbb{E}[X_1^2] = np(1-p) + n^2p^2 = \frac{3}{2}$$

$$\mathbb{E}[X_2] = \mu = 1 \quad \text{VAR}(X_2) = \sigma^2 = 1 \quad \mathbb{E}[X_2^2] = \sigma^2 + \mu^2 = 2$$

$$\mathbb{E}[X_3] = \lambda = 1 \quad \text{VAR}(X_3) = \lambda = 1 \quad \mathbb{E}[X_3^2] = \lambda + \lambda^2 = 2$$

Dove $\mathbb{E}[X_i^2]$ può essere ottenuto anche come $\mathbb{E}[X_i^2] = (\mathbb{E}[X_i])^2 + \text{VAR}(X_i)$.

(a)

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + X_3] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \mathbb{E}[X_3] = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\begin{aligned} \text{VAR}(T) &= \text{VAR}(X_1 + X_2 + X_3) = \text{VAR}(X_1) + \text{VAR}(X_2) + \text{VAR}(X_3) = \\ &= \frac{1}{2} + 1 + 1 = \frac{5}{2} = 2.5 \end{aligned}$$

(b)

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X_1 \cdot X_2 \cdot X_3] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[X_2] \cdot \mathbb{E}[X_3] = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\mathbb{E}[Z^2] = \mathbb{E}[X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2] = \mathbb{E}[X_1^2] \cdot \mathbb{E}[X_2^2] \cdot \mathbb{E}[X_3^2] = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 6$$

$$\text{VAR}(Z) = \mathbb{E}[Z^2] - (\mathbb{E}[Z])^2 = 6 - 1 = 5$$

(c)

$$\begin{aligned} P\left(W < \frac{1}{2}\right) &= P\left(\max(X_1, X_2, X_3) < \frac{1}{2}\right) = P\left(X_1 < \frac{1}{2}, X_2 < \frac{1}{2}, X_3 < \frac{1}{2}\right) = \\ &= P\left(X_1 < \frac{1}{2}\right) \cdot P\left(X_2 < \frac{1}{2}\right) \cdot P\left(X_3 < \frac{1}{2}\right) = P(X_1 = 0) \cdot P\left(X_2 < \frac{1}{2}\right) \cdot P(X_3 = 0) \end{aligned}$$

Utilizzando le definizioni di densità discreta per variabili binomiali e di Poisson si ha :

$$P(X_1 = 0) = (1-p)^n = \frac{1}{4} \quad P(X_3 = 0) = e^{-\lambda} = e^{-1}$$

Per calcolare $P\left(X_2 < \frac{1}{2}\right)$ bisogna ricondursi ad una normale standard:

$$P\left(X_2 < \frac{1}{2}\right) = P\left(\frac{X_2 - \mu}{\sigma} < \frac{\frac{1}{2} - \mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{X_2 - \mu}{\sigma} < -\frac{1}{2}\right)$$

$$P\left(X_2 < \frac{1}{2}\right) = 1 - \phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0.3085$$

dunque

$$P\left(W < \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot 0.3085 \cdot e^{-1} = 0.0284$$

(d) Prima di tutto osserviamo che le variabili $(X_1 + X_2)$ e $(X_2 + X_3)$ **non** sono indipendenti (perché hanno entrambe X_2 come addendo). Sviluppando il prodotto si ha:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X_1 + X_2) \cdot (X_2 + X_3)] &= \mathbb{E}[X_1X_2 + X_1X_3 + X_2^2 + X_2X_3] = \\ &= \mathbb{E}[X_1X_2] + \mathbb{E}[X_1X_3] + \mathbb{E}[X_2^2] + \mathbb{E}[X_2X_3] = \\ &= \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[X_2] + \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[X_3] + \mathbb{E}[X_2^2] + \mathbb{E}[X_2] \cdot \mathbb{E}[X_3] = \\ &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 + 1 \cdot 1 = 5\end{aligned}$$

Esercizio 5

$$\mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{3} \quad \text{VAR}(X_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$\mathbb{E}[X_2] = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{VAR}(X_2) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\mathbb{E}[X_3] = \mu = 1 \quad \text{VAR}(X_3) = \sigma^2 = 4$$

(a)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T] &= \mathbb{E}[X_1 + 2X_2 + 3X_3] = \mathbb{E}[X_1] + 2\mathbb{E}[X_2] + 3\mathbb{E}[X_3] = \\ &= \frac{1}{3} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 1 = \frac{1}{3} + 3 + 3 = \frac{19}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{VAR}(T) &= \text{VAR}(X_1 + 2X_2 + 3X_3) = \text{VAR}(X_1) + 4 \cdot \text{VAR}(X_2) + 9 \cdot \text{VAR}(X_3) = \\ &= \frac{2}{9} + 3 + 36 = \frac{353}{9}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}P(X_3 < X_1) &= P(X_3 < X_1 | X_1 = 0)P(X_1 = 0) + P(X_3 < X_1 | X_1 = 1)P(X_1 = 1) = \\ &= P(X_3 < 0 | X_1 = 0)P(X_1 = 0) + P(X_3 < 1 | X_1 = 1)P(X_1 = 1) = \\ &= P(X_3 < 0) \frac{2}{3} + P(X_3 < 1) \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot P\left(\frac{X_3 - 1}{2} < \frac{-1}{2}\right) + \frac{1}{3} \cdot P\left(\frac{X_3 - 1}{2} < \frac{1 - 1}{2}\right) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} \cdot \Phi(0) = \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{3} \cdot \Phi(0) \\ &= \frac{2}{3} \cdot (0.30854) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = 0.37236\end{aligned}$$

(c)

$$P(Z > \frac{1}{2}) = 1 - P(Z \leq \frac{1}{2}) =$$

$$\begin{aligned}
& 1 - P(X_1 \leq \frac{1}{2}) \cdot P(X_2 \leq \frac{1}{2}) \cdot P(X_3 \leq \frac{1}{2}) = \\
& 1 - P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 0) \cdot P\left(\frac{X_3 - 1}{2} \leq \frac{\frac{1}{2} - 1}{2}\right) = \\
& = 1 - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Phi\left(-\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{12} \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{4}\right)\right) = 0.9666
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{1}{1+X_2}\right] &= \sum_{k=0}^3 \frac{1}{1+k} \cdot P(X_2 = k) = \\
& 1 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \\
& = \frac{12 + 18 + 12 + 3}{12 \cdot 8} = \frac{45}{96} = \frac{15}{32}
\end{aligned}$$

Esercizio 6

$$\mathbb{E}[X_1] = np = \frac{3}{2} \quad \text{VAR}(X_1) = np(1-p) = \frac{3}{4} \quad \mathbb{E}[X_1^2] = 3$$

$$\mathbb{E}[X_2] = 3 \quad \text{VAR}(X_2) = 1 \quad \mathbb{E}[X_2^2] = 10$$

$$\mathbb{E}[X_3] = \frac{1}{\lambda} = 2 \quad \text{VAR}(X_3) = \frac{1}{\lambda^2} = 4 \quad \mathbb{E}[X_3^2] = 8$$

Dove $\mathbb{E}[X_2] = 2 \cdot P(X = 2) + 4 \cdot P(X = 4) = 3$.

$$\mathbb{E}[X_2^2] = 2^2 \cdot P(X = 2) + 4^2 \cdot P(X = 4) = 10$$

$$\text{VAR}(X_2) = \mathbb{E}[X_2^2] - (\mathbb{E}[X_2])^2 = 1$$

Mentre per X_1 e X_2 si può utilizzare la formula $\mathbb{E}[X_i^2] = (\mathbb{E}[X_i])^2 + \text{VAR}(X_i)$.

(a)

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[X_1 \cdot X_2 \cdot X_3] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[X_2] \cdot \mathbb{E}[X_3] = \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 9$$

$$\mathbb{E}[T^2] = \mathbb{E}[X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2] = \mathbb{E}[X_1^2] \cdot \mathbb{E}[X_2^2] \cdot \mathbb{E}[X_3^2] = 3 \cdot 10 \cdot 8 = 240$$

$$\text{VAR}(T) = \mathbb{E}[T^2] - (\mathbb{E}[T])^2 = 240 - 81 = 159$$

(b)

$$\mathbb{E}[e^{X_1+X_2}] = \mathbb{E}[e^{X_1} \cdot e^{X_2}] = \mathbb{E}[e^{X_1}] \cdot \mathbb{E}[e^{X_2}]$$

Calcoliamo separatamente $\mathbb{E}[e^{X_1}]$ $\mathbb{E}[e^{X_2}]$.

$$\mathbb{E}[e^{X_1}] = \sum_k e^k \cdot P(X_1 = k) =$$

$$= e^0 \cdot P(X_1 = 0) + e^1 \cdot P(X_1 = 1) + e^2 \cdot P(X_1 = 2) + e^3 \cdot P(X_1 = 3) =$$

$$\mathbb{E}[e^{X_1}] = \frac{1 + 3e + 3e^2 + e^3}{8}$$

$$\mathbb{E}[e^{X_2}] = \sum_k e^k \cdot P(X_2 = k) = e^2 \cdot P(X_2 = 2) + e^4 \cdot P(X_2 = 4) =$$

$$\mathbb{E}[e^{X_2}] = \frac{e^2 + e^4}{2}$$

Dunque

$$\mathbb{E}[e^{X_1+X_2}] = \frac{1 + 3e + 3e^2 + e^3}{8} \cdot \frac{e^2 + e^4}{2}$$

(c) $Z = X_2 + X_3$. Prima di tutto osserviamo che X_2 può assumere solo i valori 2 e 4 mentre X_3 è una v.a. a valori in $(0, +\infty)$ con funaione di ripartizione:

$$F_{X_3}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(Z \leq 1) &= P(X_2 + X_3 \leq 1) = \\ &= P(X_2 = 2, X_2 + X_3 \leq 1) + P(X_2 = 4, X_2 + X_3 \leq 1) = \\ &= P(X_2 = 2, 2 + X_3 \leq 1) + P(X_2 = 4, 4 + X_3 \leq 1) = \\ &= P(X_2 = 2, X_3 \leq -1) + P(X_2 = 4, X_3 \leq -3) = 0 \end{aligned}$$

Si procede in maniera analoga per $P(Z \leq 3)$

$$\begin{aligned} P(Z \leq 3) &= P(X_2 + X_3 \leq 3) = \\ &= P(X_2 = 2, X_2 + X_3 \leq 3) + P(X_2 = 4, X_2 + X_3 \leq 3) = \\ &= P(X_2 = 2, 2 + X_3 \leq 3) + P(X_2 = 4, 4 + X_3 \leq 3) = \\ &= P(X_2 = 2, X_3 \leq 1) + P(X_2 = 4, X_3 \leq -1) = \\ &= P(X_2 = 2) \cdot P(X_3 \leq 1) + P(X_2 = 4) \cdot P(X_3 \leq -1) = \\ &= \frac{1}{2}(1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot 1}) + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}}}{2} \end{aligned}$$

Calcoliamo infine $P(Z \leq 5)$

$$\begin{aligned} P(Z \leq 5) &= P(X_2 + X_3 \leq 5) = \\ &= P(X_2 = 2, X_2 + X_3 \leq 5) + P(X_2 = 4, X_2 + X_3 \leq 5) = \\ &= P(X_2 = 2, 2 + X_3 \leq 5) + P(X_2 = 4, 4 + X_3 \leq 5) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P(X_2 = 2, X_3 \leq 3) + P(X_2 = 4, X_3 \leq 1) = \\
&= P(X_2 = 2) \cdot P(X_3 \leq 3) + P(X_2 = 4) \cdot P(X_3 \leq 1) = \\
&= \frac{1}{2}(1 - e^{-\frac{3}{2} \cdot 1}) + \frac{1}{2} \cdot (1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot 1}) = 1 - \frac{e^{-\frac{3}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}}{2}
\end{aligned}$$

(d) Procedendo in maniera analoga a quanto fatto per il punto (c) si ottiene

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 2 \\ \frac{1 - e^{-\frac{z-2}{2}}}{2} & 2 \leq z < 4 \\ 1 - \frac{e^{-\frac{z-2}{2}} + e^{-\frac{z-4}{2}}}{2} & z \geq 4 \end{cases}$$

Esercizio 7

$$\mathbb{E}[X_1] = p = \frac{1}{4} \quad \text{VAR}(X_1) = p(1-p) = \frac{3}{16} \quad \mathbb{E}[X_1^2] = p = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{E}[X_2] = \mu = 5 \quad \text{VAR}(X_2) = \sigma^2 = 9 \quad \mathbb{E}[X_2^2] = \sigma^2 + \mu^2 = 34$$

$$\mathbb{E}[X_3] = 6 \quad \text{VAR}(X_3) = 2 \quad \mathbb{E}[X_3^2] = 38$$

(a) Dove $\mathbb{E}[X_3]$, $\mathbb{E}[X_3^2]$ e $\text{Var}(X_3)$ sono state ottenute tramite calcolo esplicito:

$$\mathbb{E}[X_3] = \sum_k k \cdot P(X_3 = k) = 4 \cdot \frac{1}{3} + 7 \cdot \frac{2}{3} = 6$$

$$\mathbb{E}[X_3^2] = \sum_k k^2 \cdot P(X_3 = k) = 16 \cdot \frac{1}{3} + 49 \cdot \frac{2}{3} = 38$$

$$\text{Var}(X_3) = \mathbb{E}[X_3^2] - \mathbb{E}[X_3]^2 = 38 - 6^2 = 2$$

(b) Per l'indipendenza delle variabili aleatorie si ha che la speranza del prodotto è uguale al prodotto delle speranze

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T] &= \mathbb{E}[2 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3] = 2 \cdot \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[X_2] \cdot \mathbb{E}[X_3] = \\
&= 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 5 \cdot 6 = 15
\end{aligned}$$

$$\text{Var}(T) = \mathbb{E}[T^2] - (\mathbb{E}[T])^2$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T^2] &= \mathbb{E}[(2 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3)^2] = \mathbb{E}[4 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2] = \\
&= 4 \cdot \mathbb{E}[X_1^2] \cdot \mathbb{E}[X_2^2] \cdot \mathbb{E}[X_3^2] = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 34 \cdot 38 = 1292
\end{aligned}$$

$$\text{Var}(T) = 1292 - 15^2 = 1067$$

(c)

$$\begin{aligned} P(Z > 6) &= P(\max\{X_1, X_2, X_3\} > 6) = 1 - P(\max\{X_1, X_2, X_3\} \leq 6) = \\ &= 1 - P(X_1 \leq 6, X_2 \leq 6, X_3 \leq 6) = 1 - P(X_1 \leq 6) \cdot P(X_2 \leq 6) \cdot P(X_3 \leq 6) = \\ &= 1 - 1 \cdot F_{X_2}(6) \cdot \frac{1}{3} = 1 - \frac{\phi(\frac{6-\mu}{\sigma})}{3} = 1 - \frac{\phi(\frac{1}{3})}{3} \simeq 0.79 \end{aligned}$$

(d)

$$\mathbb{E}[(X_1 - X_2) \cdot (X_1 + X_2)] = \mathbb{E}[(X_1^2 - X_2^2)] = \mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[X_2^2] = \frac{1}{4} - 34 = -33.75$$

Esercizio 8

(a) $\frac{3}{8}, \frac{87}{64}$

(b) $\frac{3}{4}(e^{-3} - e^{-4}) \simeq 0.0236$

(c)
$$F_W(w) = \begin{cases} 0 & w < 0 \\ 1 - \frac{1}{4}(e^{-2w}) & 0 \leq w < 1 \\ 1 & w \geq 1 \end{cases}$$

(d) 2

Esercizio 9

(a) $\frac{17}{2}, \frac{211}{12}$

(b) 2, 13, $\frac{1}{2}$

(c) 4

(d) $\frac{1}{8}$

(e)
$$F_W(w) = \begin{cases} 0 & w < 0 \\ \frac{w}{8} & 0 \leq w < 1 \\ \frac{w}{4} & 1 \leq w < 4 \\ 1 & w \geq 4 \end{cases}$$