Esercitazione del 13/03/2012
Istituzioni di Calcolo delle Probabilità

David Barbato
barbato@math.unipd.it

Somma di variabili aleatorie indipendenti.
Caso discreto.
Siano X e Y due variabili aletaroie discrete indipendenti, sia $T := X + Y$ allora per ogni $t \in \mathbb{R}$ vale:

$$\begin{aligned} P(T = t) &= P(X + Y = t) = P\left(\bigcup_{\substack{x,y \\ x+y=t}} \{X = x, Y = y\}) \right) \\ &= \sum_{\substack{x,y \\ x+y=t}} P(X = x, Y = y)) \end{aligned}$$

$$P(T = t) = \sum_{x} P(X = x, Y = t - x))$$

Caso assolutamente continuo.
Siano X e Y due variabili aletaroie assolutamente continue indipendenti con densità f_X e f_Y, sia $T := X + Y$ allora per ogni $t \in \mathbb{R}$ vale:

$$\begin{aligned} F_T(t) = P(T \leq t) &= P(X + Y \leq t) = \\ &= \int_{x+y \leq t} f_X(x) f_Y(y) dy\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) F_Y(t - x) dx \end{aligned}$$

Dunque

$$f_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(t - x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) f_X(t - y) dy \tag{1}$$

Esercizio 1. *Siano X e Y due variabili indipendenti, sia $X \sim Esp(1)$, sia $Y \sim Esp(2)$ e sia $T := X + Y$*
(a) Qualè la distribuzione di T. (`Utilizzare l'equazione` (1).)

Esercizio 2. *Siano X e Y due variabili indipendenti, sia X assolutamente continua con distribuzione uniforme sull'intervallo $(0, 1)$ e sia Y v.a. discreta con distribuzione uniforme su $\{0, 1\}$. Sia infine $T := X + Y$*
(a) Verificare che Y è una v.a. di bernoulli per un certo parametro p. Quanto vale p.
*(b) Qualè la distribuzione di T. (**Indicare a quale distribuzione appartiene T e quali sono i parametri.**)*

Soluzione: (a) $p = \frac{1}{2}$, (b) $T \sim Unif(0, 2)$

Valore atteso condizionato.
Sia (X, Y) un vettore aleatorio discreto. Sia $p_{(X,Y)}$ la sua densità discreta e $p_{X|Y}$ la densità discreta condizionata.

$$p_{(X,Y)}(x, y) := P(X = x, Y = y) \qquad \sum_{x,y} p_{(X,Y)}(x, y) = 1$$

$$p_{(X|Y)}(x|y) := P(X = x|Y = y) = \frac{p_{(X,Y)}(x, y)}{p_Y(y)}$$

Ricordiamo che se y è tale che $p_Y(y) > 0$ allora $p_{(X|Y)}(\cdot|y)$ definisce una misura di probabilità per cui $\sum_x p_{(X|Y)}(x|y) = 1$. Poiché $p_{(X|Y)}(\cdot|y)$ definisce una misura di probabilità (sempre nel caso $p_Y(y) > 0$) allora ha senso parlare di valore atteso rispetto a questa misura, tale valore atteso sarà detto valore atteso di X condizionato a $Y = y$ e scriveremo $\mathbb{E}[X|Y = y]$

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = \sum_x x p_{(X|Y)}(x|y)$$

Se X e Y sono indipendenti allora si ha $p_{(X|Y)}(x|y) = p_{(X)}(x)$ e dunque vale la seguente

Proposition 0.1. *Se (X, Y) è un vettore aleatorio e X è indipendente da Y allora*

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = \mathbb{E}[X]$$

Una relazione importante che riguarda il valore atteso condizionato è la seguente:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|Y]\right]$$

Che cosa è $\mathbb{E}[X|Y]$? E' importante sottolineare il fatto che $\mathbb{E}[X|Y]$ in questo caso è una variabile aleatoria, essa è definita nel modo seguente:

$$\mathbb{E}[X|Y] = \begin{cases} \mathbb{E}[X|Y = y_1] & \text{se } Y = y_1 \\ \mathbb{E}[X|Y = y_2] & \text{se } Y = y_2 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Esercizio 3. *Sia $T_1 \sim Geo(\frac{1}{3})$, sia $T_2 \sim Geo(\frac{1}{5})$ e sia $Y \sim Bern(\frac{1}{4})$. Supponiamo inoltre che Y sia indipendente da T_1 e T_2.*
Sia $X := \begin{cases} T_1 & \textit{se } Y = 0 \\ T_2 & \textit{se } Y \neq 0 \end{cases}$.
Calcolare $\mathbb{E}[X]$.
Soluzione. $\frac{7}{2}$

Esercizio 4. *Siano $T_1, \dots T_n$ una n-upla di v.a. binomiali con distribuzione $T_k \sim Bin(p, k)$ con $p \in (0, 1)$. Sia Y una v.a. indipendente dalle T_i con distribuzione $Y \sim Unif\{1, 2, \dots, n\}$. Sia infine* $X := \begin{cases} T_1 & \textit{se } Y = 1 \\ T_2 & \textit{se } Y = 2 \\ \dots & \dots \\ T_n & \textit{se } Y = n \end{cases}$.
(a) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.
(b) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.
Soluzione. (a) $\frac{n+1}{2}$, *(b)* $\frac{n+1}{2}p$

Esercizio 4 bis.
Viene lanciato un dado regolare a sei facce, sia Y il risultato del lancio. Dopo aver lanciato il dado vengono lanciate Y monete regolari, sia X il numero di teste ottenute.
(a) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.
(b) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.
Soluzione. Ricondursi all'esercizio precedente con $n = 6$ e $p = \frac{1}{2}$

Distribuzione di una funzione di v.a. continua.

Esercizio 5. *Sia $X \sim Esp(3)$ e sia $Y = 7 - 2X$. Calcolare la funzione di densità f_Y.*

Esercizio 6. *Sia $X \sim Unif(1, 2)$ e sia $Y = X^2$. Calcolare la funzione di densità f_Y.*

Esercizio 7. *Sia $X \sim Unif(0, 1)$ e sia $Y = e^X$. Calcolare la funzione di densità f_Y.*