Esercitazione del 21/03/2012
Istituzioni di Calcolo delle Probabilità

David Barbato
barbato@math.unipd.it

Esercizio 1. *Supponiamo di avere un dado regolare e sei monete numerate da 1 a 6, di cui la prima moneta ha due teste, la seconda moneta ha due croci mentre le restanti quattro monete sono regolari. Prima lanciamo il dado, sia X il risultato del lancio; poi lanciamo la moneta corrispondente al risultato del lancio del dado (cioè lanciamo la prima moneta se $X = 1$, lanciamo la seconda se $X = 2$ e cos via.) Indichiamo infine con T l'evento il risultato del lancio è testa e con C l'evento il risultato del lancio è croce.*

(a) Calcolare $\mathbb{E}[X]$ e $VAR[X]$.
(b) Quanto vale $P(T|X = 1)$, $P(T|X = 2)$, ... ,$P(T|X = 6)$?
(c) Quanto vale $P(T|X < 4)$?
(d) Quanto vale $P(T|X \text{ è pari})$?
(e) Quanto vale $P(T)$?
(f) Quanto vale $P(X = 1|T)$?
(g) Quanto vale $P(X = 2|T)$?
(h) Quanto vale $P(X = 3|T)$?
(i) Calcolare $\mathbb{E}[X|T]$
(l) Scegliamo una moneta a caso (tra le sei), ed effettuiamo 100 lanci (sempre con la stessa moneta). Stimare la probabilità che vi siano più di 60 teste.

Esercizio 2. *Sia (X, Y) un vettore aleatorio assolutamente continuo, con densità $f_{(X,Y)}$ data da:*

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \alpha\ x & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Calcolare α.
(b) Calcolare la funzione di densità f_X.
(c) Calcolare la funzione di ripartizione F_X.
(d) Calcolare la funzione di densità f_Y.
(e) Calcolare la funzione di ripartizione F_Y. Verificare che la funzione F_Y è continua.
(f) Le variabili X e Y sono indipendenti?
(g) Sia $W = Y^2$, calcolare la funzione di densità f_W.

Esercizio 3. *Esporre una versione della legge forte dei grandi numeri.*

Esercizio 4. *Siano X_1, X_2 e X_3 3 variabili aleatorie indipenti con le seguenti distribuzioni: $X_1 \sim \Gamma(\alpha = 3, \lambda = \frac{1}{2})$; $X_2 \sim Bin(2, \frac{1}{2})$, X_3 sia discreta tale che $P(X_3 = -1) = P(X_3 = 1) = \frac{1}{2}$. Siano infine S, T e W le variabili aleatorie definite da: $S = X_1 + X_2 + X_3$, $T = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$ e $W = \min\{X_2, X_3\}$.*

(a) Calcolare $\mathbb{E}[X_3]$ e $VAR[X_3]$.
(b) Calcolare $\mathbb{E}[S]$ e $VAR[S]$.
(c) Calcolare $\mathbb{E}[T]$ e $VAR[T]$.
(d) Calcolare $P(T = 0)$.
(e) Calcolare $P(T > 0)$.
(f) Qual è il supporto di W?
(g) Calcolare la densità discreta di W.

Esercizio 5. *Sia Y una variabile aleatoria uniforme sull'intervallo $(0, 1)$. Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua con densità f_X:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{x}} & 0 < x < \alpha \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Calcolare α.
(b) Calcolare F_X.
(c) Trovare una funzione non decrescente g da $(0, 1)$ in $\mathbb{R}$ tale che posto $Z := g(Y)$ si abbia $Z \sim X$.

Soluzioni

Esercizio 1 (a) $\mathbb{E}[X] = \frac{7}{2} = 3.5$, $VAR[X] = \frac{35}{12}$; (b) $P(T|X = 1) = 1$, $P(T|X = 2) = 0$, $P(T|X = 3) = \frac{1}{2}$, $P(T|X = 4) = \frac{1}{2}$, $P(T|X = 5) = \frac{1}{2}$, $P(T|X = 6) = \frac{1}{2}$; (c) $P(T|X < 4) = \frac{1}{2}$; (d) $P(T|X \text{ è pari}) = \frac{1}{3}$; (e) $P(T) = \frac{1}{2}$; (f) $P(X = 1|T) = \frac{1}{3}$; (g) $P(X = 2|T) = 0$; (h) $P(X = 3|T) = \frac{1}{6}$; (i) $E[X|T] = \frac{10}{3}$; (l) $P(Y > 60) = P\left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3}(1 - \Phi(2.1))\right) \simeq 0.1786$