Esercitazione del 23/03/2012
Istituzioni di Calcolo delle Probabilità

David Barbato
barbato@math.unipd.it

Esercizio 1. *Ad ogni scommessa un giocatore ha probabilità 0.1 di vincere 4, 0.2 di vincire 1 e 0.7 di perdere 1. Denotiamo con* $X_1,\ X_2, \cdot, X_{100}$ *le vincite(/perdite) delle prime cento giocate e supponiamo che siano indipendenti.*

(a) Calcolare $\mathbb{E}[X_i]$
(b) Calcolare $VAR[X_i]$
(c) Sia Y la vincita(/perdita) complessiva dopo aver giocato 100 partite. Quanto valgono $\mathbb{E}[Y]$ e $VAR[Y]$
(d) Stimare la probabilità che Y sia maggiore di zero.

Esercizio 2. *Sia* (X, Y) *un vettore aleatorio assolutamente continuo, con densità* $f_{(X,Y)}$ *data da:*

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \alpha(e^x + e^y) & \textit{se } 0 < x < 1, 0 < y < 2 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Calcolare α.
(b) Calcolare la funzione di densità f_X.
(c) Calcolare la funzione di ripartizione F_X.
(d) Calcolare la funzione di densità f_Y.
(e) Calcolare la funzione di ripartizione F_Y. Verificare che la funzione F_Y è continua.
(f) Le variabili X e Y sono indipendenti?
(g) Calcolare la funzione generatrice dei momenti $M_{(X,Y)}$.
(h) Calcolare $\mathbb{P}(X + Y < 1)$.
(i) Calcolare $\mathbb{P}(X + Y < 1|Y < 1)$.

Esercizio 3. *Esporre una versione del teorema del limite centrale.*

Esercizio 4. *Siano* X_1 *e* X_2 *due variabili aleatorie indipendenti con le seguenti distribuzioni:* $X_1 \sim Poisson(\lambda = 1)$*;* $X_2 \sim Unif(-1, 1)$*. Siano infine* T *e* W *le variabili aleatorie definite da:* $T = \min(X_1,\ X_2)$ *e* $W = \max\{X_1, X_2\}$*.*

(a) Calcolare $\mathbb{P}(X_1 > 0)$.
(b) Calcolare $\mathbb{P}(X_2 > 0)$.
(c) Calcolare $\mathbb{P}(X \cdot X_2 = 0)$.
(d) Calcolare $\mathbb{P}(X \cdot X_2 < 0)$.
(e) Calcolare $\mathbb{P}(X \cdot X_2 > 0)$. (Verificare che la somma delle probabilità calcolate nei punti (c),(d) ed (e) sia 1)
(f) Calcolare $\mathbb{P}(T = 0)$.
(g) Calcolare $\mathbb{P}(W = 0)$.
(h) Calcolare $\mathbb{P}(T > 1)$.
(i) Calcolare $\mathbb{P}(W > 1)$.

Esercizio 5. *Sia* $Z^T = (Z_1, Z_2.Z_3, Z_4)$ *un vettore aleatorio con* $Z_1,\ Z_2,\ Z_3$ *e* Z_4 *indipendenti con distribuzione normale standard. Sia* $X^T = (X_1, X_2, X_3)$ *il vettore aletorio con distribuzione normale multivariata data da:*

$$\begin{aligned} X_1 &= Z_1 + Z_2 + 1 \\ X_2 &= Z_1 + Z_3 + 2 \\ X_3 &= Z_1 + Z_4 + 5 \end{aligned}$$

(a) Calcolare il valore medio μ del vettore aleatorio X. $\mu^T = (\mathbb{E}[X_1], \mathbb{E}[X_2], \mathbb{E}[X_3])$.
(b) Calcolare la matrice di covarianza Σ associata ad X.
(c) Sappiamo che un vettore aleatorio con distribuzione normale multivariato è assolutamente continuo se e solo se la matrice Σ è invertibile. Il vettore $X = (X_1, X_2, X_3)^T$ è assolutamente continuo?