Prova d'esame di
Istituzioni di Calcolo delle Probabilità
Laurea Triennale in Scienze Statistica.
12/04/2013

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA...

Esercizio 1. (V. 10 punti.)
`[Se possibile esprimere i risultati sotto forma di frazioni.]`

Una ditta di ovetti di cioccolato decide di promuovere le vendite inserendo in ogni ovetto un regalo costituito da un pupazzetto raffigurante uno dei 7 nani (*Brontolo, Cucciolo, Dotto, Eolo, Gongolo, Mammolo, Pisolo*). Alessandra compra 3 di questi ovetti. Supponiamo che per ciascuno ovetto la probabilità di trovare uno qualsiasi dei 7 nani sia la medesima e che tali probabilità siano independenti.

(a) Qual è la probabiltà che nel secondo ovetto ci sia *Eolo*?
(b) Qual è la probabiltà che nei tre ovetti ci siano nell'ordine *Mammolo, Gongolo* e *Brontolo* ?
(c) Qual è la probabiltà che nei tre ovetti ci siano in un ordine qualsiasi *Mammolo, Gongolo* e *Brontolo* ?
(d) Qual è la probabiltà che almeno uno dei tre ovetti contenga *Cucciolo*?
(e) Qual è la probabiltà che almeno uno dei tre ovetti contenga *Cucciolo* sapendo che il primo ovetto contiene *Eolo*?
(f) Qual è la probabilità che siano tutti e tre diversi?
(g) Qual è la probabiltà che almeno uno dei tre ovetti contenga *Cucciolo* sapendo che sono diversi?
(h) Qual è la probabiltà che almeno uno dei tre ovetti contenga *Cucciolo* sapendo che sono tutti e tre uguali?
(i) Qual è la probabiltà che ci siano esattamente due pupazzetti di *Pisolo*?
(l) Qual è la probabiltà che almeno uno dei tre ovetti contenga *Gongolo* sapendo che almeno un ovetto contiene *Eolo*?

Esercizio 2 (V. 2 punti.)

Esporre una versione (a scelta) della legge dei grandi numeri.

Esercizio 3 (V. 10 punti.)
Sia (X, Y) un vettore aleatorio con distribuzione assolutamente continua con densità $f_{(X,Y)}$ data da:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \alpha\, e^{-4x} & \text{se } (x, y) \in D \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, y < e^{-x}\}$.
`[Sugg. disegnare un grafico del supporto` D`]`

(a) Calcolare α.
(b) Calcolare la funzione di densità f_X.
(c) Calcolare la funzione di ripartizione F_X.
(d) Calcolare la funzione di densità f_Y.
(e) Calcolare la funzione di ripartizione F_Y.
(f) La variabile aleatoria X appartiene ad una distribuzione nota? Quale? Indicare gli eventuali parametri.
(g) Le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti? Giustificare la risposta.
(h) Calcolare il valore atteso $\mathbb{E}[Y e^{4X}]$.
(i) Calcolare $P(X + Y < 1)$.
(l) Calcolare $P(Y > e^{-1}X)$.

Esercizio 4 (V. 4 punti.)

Sia X una v.a. di tipo Gamma con distribuzione: $X \sim Gamma(\alpha = 2, \lambda = \frac{1}{2})$ e sia $Y := 1 - 2X$.

(a) Calcolare $\mathbb{E}[X]$, $VAR(X)$ e $E[Y]$.
(b) Calcolare $VAR(Y)$.
(c) Qual è il supporto della v.a. Y?
(d) Qual è la densità della v.a. Y?

Esercizio 5 (V. 7 punti.)
Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti. Sia X v.a. uniforme sull'intervallo $(0, 2)$ e sia Y v.a. assolutamente continua con densità f_Y

$$f_Y(y) = \begin{cases} 5e^{-5(2-y)} & \text{se } y < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sia infine $W := max\{X, Y\}$.

(a) Calcolare la funzione di ripartizione F_Y della v.a Y.
(b) Calcolare la funzione generatrice dei momenti M_Y della v.a. Y. Indicare per quali valori di t la funzione generatrice dei momenti $M_Y(t)$ è finita.
(c) Calcolare la pseudoinversa della funzione di ripartizione F_Y.
(d) Si presenti un metodo per simulare una v.a. distribuita come la v.a. Y.
(e) Calcolare la funzione di ripartizione F_W della v.a W.
(f) Calcolare la funzione di densità f_W della v.a W.
(g) Calcolare la funzione di rischio della v.a. W.