Prova d'esame
di Istituzioni di Calcolo delle Probabilità (B)
06/07/2012

N. MATRICOLA ....

COGNOME e NOME..

Esercizio 1

Andrea, Elia, Leonardo e Valerio sono i quattro finalisti di un torneo di tennis. La prima semifinale vedrà affrontarsi Andrea ed Elia, mentre nella seconda semifinale si affronteranno Leonardo e Valerio. Infine il vincitore del torneo sarà determinato dall'esito della finale in cui si affronteranno i vincitori delle due semifinale. Gli esiti degli incontro sono independenti tra di loro, le probabilità di vittoria sono rappresentate dalla seguente tabella:

	vincente			
	Andrea	Elia	Leonardo	Valerio
Andrea	X	40%	40%	30%
Elia	60%	X	50%	40%
Leonardo	60%	50%	X	40%
Valerio	70%	60%	60%	X

Per esempio la probabilità che Valerio vinca contro Andrea è del 30%.
(a) Qual è la probabilità che in finale si affrontino Andrea e Leonardo?
(b) Qual è la probabilità che Leonardo non arrivi in finale?
(c) Qual è la probabilità che in finale si affrontino Elia e Leonardo?
(d) Qual è la probabilità che Leonardo vinca il torneo?
(e) Qual è la probabilità che Andrea vinca il torneo?
(f) Qual è la probabilità che Elia vinca il torneo?
(g) Qual è la probabilità che Valerio vinca il torneo?
(h) Quanto vale la somma delle probabilità dei quesiti (d),(e),(f),(g)? Perché?

Solution
(a) $\frac{9}{25} = 36\%$. (b) $\frac{2}{5} = 40\%$. (c) $\frac{6}{25} = 24\%$. (d) $\frac{33}{125} = 26.4\%$. (e) $\frac{48}{125} = 38.4\%$. (f) $\frac{27}{125} = 21.6\%$. (g) $\frac{17}{125} = 13.6\%$. (h) La somma dà 1 perché i quattro eventi sono disgiunti e ricoprono tutti i casi possibili.

Esercizio 2

Sia X una v.a. assolutamente continua con densità f_X data da:

$$f_X(x) = \begin{cases} a + bx & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Per quali valori di a e b, f_X è effettivamente una densità di probabilità?
(b) Calcolare la funzione di ripartizione F_X.
(c) Calcolare la funzione di rischio della v.a. X.
(d) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.

Solution

(a) $0 \leq a \leq 2$ e $b = 2 - 2a$.

(b) $F_X(t) \begin{cases} 0 & t < 0 \\ at + \frac{b}{2}t^2 & 0 \leq t < 1 \\ 1 & 1 \leq t \end{cases}$.

(c) $h_X(t) = \frac{a+bt}{1-at-\frac{b}{2}t^2} \qquad \forall t \in [0, 1]$.

(d) $\mathbb{E}[X] = \frac{a}{2} + \frac{b}{3}$.

Esercizio 3

Sia (X, Y) un vettore aleatorio con distribuzione assolutamente continua con densità $f_{(X,Y)}$ data da:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{\alpha}{x^2y^4} & \text{se } x > 1,\ y > 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Calcolare α.
(b) Calcolare la funzione di densità f_X.
(c) Calcolare la funzione di densità f_Y.
(d) Calcolare la funzione di ripartizione F_X.
(e) Calcolare la funzione di ripartizione F_Y.
(f) Le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti? Giustificare la risposta.
(g) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.
(h) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.
(i) Calcolare $\mathbb{E}[\frac{Y}{X}]$.
(l) Calcolare $P(X < Y)$.

Solution

(a) $\alpha = 3$.
(b) $f_X(x) \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & x > 1 \end{cases}$.
(c) $f_Y(y) \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ \frac{3}{y^4} & y > 1 \end{cases}$.
(d) $F_X(a) \begin{cases} 0 & a \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{a} & a > 1 \end{cases}$.
(e) $F_Y(b) \begin{cases} 0 & b \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{b^3} & b > 1 \end{cases}$.
(f) Si sono indipendneti. Infatti è una verificare immediata che $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
(g) $\mathbb{E}[X] = +\infty$.
(h) $\mathbb{E}[Y] = \frac{3}{2}$
(i) $\mathbb{E}\left[\frac{Y}{X}\right] = \frac{3}{4}$.
(l) $P(X < Y) = \frac{1}{4}$

Esercizio 4

Siano X, Y due variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che X sia normale di media $\mu = 1$ e varianza $\sigma^2 = 4$ mentre Y sia bernoulliana di parametri $p = \frac{1}{2}$. Siano infine $S = XY + X$ e $W = \min\{X, Y\}$.

(a) Calcolare $\mathbb{E}[S]$.
(b) Calcolare $\mathbb{E}[S^2]$.
(c) Calcolare $\mathrm{VAR}(S)$.
(d) Calcolare $\mathbb{E}[2 \cdot S \cdot Y]$.
(e) Calcolare $P(W < 0)$.
(f) Calcolare $P(W > \frac{1}{2}$.
(g) Calcolare $P(W = 0)$.
(h) Calcolare $P(W = 1)$.
(i) Calcolare F_W funzione di ripartizione di W.

Solution

(a) $\frac{3}{2}$.
(b) $\frac{25}{2}$.
(c) $\frac{41}{4}$.
(d) 2.
(e) $1 - \phi\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 0.3085$.
(f) $\frac{1}{2}\phi\left(\frac{1}{4}\right) \simeq 0.2993$.
(g) $\frac{1}{2}\phi\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 0.3457$.
(h) $\frac{1}{4}$.
(i) $F_W(w) \begin{cases} \phi\left(\frac{t-1}{2}\right) = 1 - \phi\left(\frac{1-t}{2}\right) & t < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}\phi\left(\frac{1-t}{2}\right) & 0 \le t < 1 \\ 1 & 1 \le t \end{cases}.$