Prova d'esame di
Istituzioni di Calcolo delle Probabilità
Laurea Triennale in Scienze Statistica.
24/06/2013

COGNOME e NOME

N. MATRICOLA.....

Esercizio 1. (V. 5 punti.)

Giulia partecipa ad un test a risposte multiple composto da N domande con 5 risposte ciascuna. Giulia sa la risposta di una domanda con probabilità p (indipendentemente dalle altre domande). Se sa la risposta indica la risposta giusta altrimenti sceglie a caso. Sia X il numero totale di risposte corrette di Giulia.

- (a) Qual è la probabilità che Giulia risponda correttamente alla prima domanda?
- (b) A quale distribuzione appartiene la variabile aleatoria X ? Indicarne i parametri.
- (c) Quanto valgono $E[X]$ e $VAR[X]$?
- (d) Supponiamo (solo per il quesito (d)) che si abbia $N = 100$, per quali valori del parametro p il numero medio di risposte corrette di Giulia è superiore o uguale a 60
- (e) Supponiamo (solo per il quesito (e)) che si abbia $N = 75$ e $p = \frac{1}{2}$. Stimare la probabilità che Giulia dia almeno 35 risposte corrette.

Esercizio 2 (V. 2 punti.)

Esporre la definizione di indipendenza tra un numero generico di eventi.

Esercizio 3 (V. 9 punti.)

Sia (X, Y) un vettore aleatorio con distribuzione assolutamente continua con densità $f_{(X,Y)}$ data da:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \alpha x + \beta y & \text{se } (x, y) \in Q \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove Q è il quadrato definita da $Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0 \leq y \leq 1\}$.

Disegnare un grafico del supporto Q .

(a) Per quali valori di $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ vale la seguente proposizione “ per ogni $(x, y) \in Q$ si ha $\alpha x + \beta y \geq 0$ ”? [Sugg. poiché la funzione $\alpha x + \beta y$ è lineare è sufficiente verificare la disuguaglianza ai vertici del quadrato Q .]

(b) Per quali valori di $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ la funzione $f_{(X,Y)}$ è effettivamente una densità di probabilità? Indicare su un grafico i punti (α, β) del piano tali che $f_{(X,Y)}$ sia effettivamente una densità di probabilità.

(c) Calcolare la funzione di densità f_X .

(d) Calcolare la funzione di ripartizione F_X .

(e) Calcolare la funzione di densità f_Y .

(f) Calcolare la funzione di ripartizione F_Y .

(g) Per quali valori di (α, β) la variabile aleatoria X è una variabile aleatoria uniforme sull'intervallo $(-1, 0)$. [Sugg. (α, β) deve soddisfare anche le condizioni del quesito (b).]

(h) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.

(i) Per quali valori di (α, β) si ha $\mathbb{E}[X] = -\frac{7}{6}$?

Esercizio 4 (V. 8 punti.)

Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che X abbia una distribuzione bernoulliana di parametri $p \in (0, 1)$ e Y abbia una distribuzione bernoulliana di parametro $q \in (0, 1)$. Sia infine $T = X - Y$, $W = X \cdot Y$ e $Z = X + Y$

- (a) Calcolare $\mathbb{E}[T]$, $\mathbb{E}[W]$ e $E[Z]$.
- (b) Calcolare $VAR(T)$ e $VAR(Z)$.
- (c) Calcolare $VAR(W)$.
- (d) Calcolare $\mathbb{E}[T \cdot W]$.
- (e) Calcolare $COV[T, W]$.
- (f) Calcolare $COV[Z, W]$.
- (g) Calcolare la distribuzione di T . Indicare il supporto e la densità discreta.
- (h) Calcolare la distribuzione di W . Indicare il supporto e la densità discreta.

Esercizio 5 (V. 8 punti.)

Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti. Sia X v.a. binomiale di parametri $p = \frac{1}{2}$ e $n = 3$, sia Y v.a. geometrica di parametro $p = \frac{1}{2}$. Sia infine $T := \min\{X, Y\}$.

- (a) Calcolare $P(T = 0)$.
- (b) Calcolare $P(T = 1)$.
- (c) Calcolare $P(T = 2)$.
- (d) Calcolare $P(T = 3)$.

Verificare che la somma delle risposte ai quesiti (a),(b),(c) e (d) dia 1.

- (e) Calcolare l'entropia della v.a. T
- (f) Calcolare $P(T = 0|Y = 2)$ e $P(T = 1|Y = 2)$.
- (g) Calcolare $P(T = 2|Y = 2)$ e $P(T = 3|y = 2)$.
- (h) Calcolare $\mathbb{E}[T|Y = 2]$.