

Prova d'esame
di Istituzioni di Calcolo delle Probabilità (B)
17/09/2012

N. MATRICOLA

COGNOME e NOME.....

Esercizio 1

Benedetta e Chiara giocano a Dadi. Possiedono 4 dadi regolari a sei facce. Benedetta lancia il primo ed il secondo dado, mentre Chiara lancia gli altri due dadi. Siano D_1 , D_2 , D_3 e D_4 i risultati dei quattro lanci (D_1 e D_2 sono i risultati del primo e secondo dado lanciati da Benedetta mentre D_3 e D_4 sono i risultati dei lanci di Chiara). Sia infine $X := D_1 + D_2$ la somma dei risultati dei dadi lanciati da Benedetta e $Y := D_3 + D_4$ la somma dei risultati dei dadi lanciati da Chiara.

- (a) Qual è la probabilità che la somma X realizzata da Benedetta sia uguale a 6?
- (b) Qual è la probabilità che la somma X realizzata da Benedetta sia minore a 6?
- (c) Qual è la probabilità che la somma X realizzata da Benedetta sia maggiore a 6?
- (d) Calcolare la probabilità $P(X = 9, Y = 10)$?
- (e) Qual è la probabilità che il primo lancio di benedetta dia come esito un numero pari?
- (f) Quanto vale la probabilità $P(D_1 = 1, D_2 = 2, D_3 = 3, D_4 = 4)$
- (g) Quanto vale la probabilità $P(D_1 = D_4)$
- (h) Quanto vale la probabilità $P(X = 10, D_1 \text{ è pari })$
- (i) Quanto vale la probabilità $P(X = 10 | D_1 \text{ è pari })$
- (l) Quanto vale la probabilità $P(D_1 \text{ è pari } | X = 10)$
- (m)* Calcolare la probabilità che Chiara e Benedetta abbiano ottenuto la stessa somma.

Esercizio 2

Sia X una v.a. discreta tale che:

$$P(X = -2) = P(X = -1) = P(X = 0) = P(X = 1) = P(X = 2) = \frac{1}{5}$$

Sia $Y := X^2$.

- (a) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.
- (b) Calcolare $\mathbb{E}[X^2]$.
- (c) Calcolare $Var(X)$.
- (d) Calcolare $\mathbb{E}\left[\frac{X^2}{1+X^2}\right]$.
- (e) Quali valori può assumere la variabile aleatoria Y ? Calcolare la distribuzione di Y .
- (f) Calcolare la funzione generatrice dei momenti della variabile aleatoria Y .

Esercizio 3

Sia (X, Y) un vettore aleatorio con distribuzione assolutamente continua con densità $f_{(X,Y)}$ data da:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \alpha \frac{e^{-x}}{x} & \text{se } 0 < y < x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (a) Calcolare la funzione di densità f_X .
- (b) Calcolare α . (Utilizzare la formula $\int f_X(x)dx = 1$)
- (c) Calcolare la funzione di ripartizione F_X .
- (d) A quale distribuzione appartiene la v.a. X . Indicare i valori degli eventuali parametri.
- (e) Qual è il supporto della v.a. X ? Qual è il supporto della v.a. Y ?
- (f) Le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti? Giustificare la risposta.

Esercizio 4

Siano X, Y due variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che X abbia una distribuzione uniforme sull'intervallo $(0, 1)$ mentre Y sia esponenziale di parametro $\lambda = 1$. Siano infine $W = \min\{X, Y\}$ e $T = \max\{X, Y\}$.

- (a) Scrivere le funzioni di densità f_X e f_Y e le funzioni di ripartizioni F_X e F_Y delle variabili aleatorie X e Y .
- (b) Calcolare la funzione di ripartizione F_W della v.a. W .
- (c) Calcolare la funzione di ripartizione F_T della v.a. T .
- (d) Calcolare la funzione di densità f_W della v.a. W .
- (e) Calcolare la funzione di densità f_T della v.a. T .
- (f) Calcolare la funzione di rischio h_W della v.a. W .
- (g) Calcolare la funzione di rischio h_T della v.a. T .
- (h) Calcolare $\mathbb{E}[W]$.
- (i) Calcolare $\mathbb{E}[e^W]$.