Prova d'esame di
Istituzioni di Calcolo delle Probabilità
Laurea Triennale in Scienze Statistica.
09/09/2013

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA...

Esercizio 1. (V. 12 punti.)
Supponiamo di avere due urne che chiameremo urna A e urna B. Nell'urna A ci sono i numeri da 1 a 50 mentre nell'urna B ci sono i numeri da 1 a 90. Scegliamo a caso un'urna ed estraiamo un numero a caso, indichiamo questo numero con la v.a. X. Dall'altra urna (quella dalla quale non abbiamo estratto X) estraiamo un secondo numero che indichiamo con Y.
Indichiamo con A l'evento il primo numero (X) è stato estratto dall'urna A (ed il secondo dall'urna B). Indichiamo invece con B l'evento il primo numero (X) è stato estratto dall'urna B (ed il secondo dall'urna A).

(a) Qual è la probabiltà che il primo numero estratto sia 30 se sappiamo che è stato estratto dall'urna A?
(b) Qual è la probabiltà che il primo numero estratto sia 30 se sappiamo che è stato estratto dall'urna B?
(c) Qual è la probabiltà che il primo numero estratto sia 30?
(d) Qual è la probabiltà che il primo numero estratto sia 70 se sappiamo che è stato estratto dall'urna A?
(e) Qual è la probabiltà che il primo numero estratto sia 70 se sappiamo che è stato estratto dall'urna B?
(f) Qual è la probabiltà che il primo numero estratto sia 70?
(g) Qual è la probabiltà che il primo numero estratto sia minore o uguale a 30?
(h) Qual è la probabiltà che il primo numero estratto sia maggiore di 70?
(i) Calcolare $P(Y = 30|X = 70)$.
(l) Calcolare $P(A|X = 30)$.
(m) Calcolare $P(Y = 70|X = 30)$.
(n) Calcolare $P(X = Y)$.

Esercizio 2 (V. 2 punti.)

Esporre una versione a scelta del toerema del limite centrale.

Esercizio 3 (V. 4 punti.)

Un forno produce rosette di pane. Il peso di una rosetta di pane può essere rappresentato da una variabile aleatoria normale $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con $\mu =$ 50gr e deviazione standard σ. Il peso ideale sarebbe 50gr ed una rosetta è considerata accettabile se ha un peso compreso tra 35gr e 65gr. In un giorno vengono prodotto $N = 10000$ rosette, indichiamo con Y il numero di rosette non accettabili.

(a) Se $\sigma = 5$gr, qual è la probabiltà che una rosetta sia accettabile?
(b) Se $\sigma = 5$gr, qual è la media e la varianza della v.a. Y?
(c) Supponiamo ancora $\sigma = 5$gr, stimare la probabilità che Y sia maggiore o uguale a 30.?
(d) Sia ora σ incognita, per quali valori di σ la probabilità che una rosetta sia difettosa è minore del 5%?

Esercizio 4 (V. 9 punti.)
Sia (X, Y) un vettore aleatorio con distribuzione assolutamente continua con densità $f_{(X,Y)}$ data da:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \alpha e^{-(x+y)} & \text{se } (x, y) \in D \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove D è l'insieme definito da $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x\}$.

Disegnare un grafico del supporto D.
(a) Calcolare α.
(b) Calcolare la funzione di densità f_X.
(c) Calcolare la funzione di ripartizione F_X.
(d) Calcolare la funzione di densità f_Y.
(e) Calcolare la funzione di ripartizione F_Y.
(f) La v.a. Y appartiene ad una distribuzione nota. Indicarne gli eventuale parametri. Quanto vale $\mathbb{E}[Y]$?
(g) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.
(h) Le v.a. X e Y sono indipendenti? Giustificare la risposta.
(i) Calcolare la funzione di rischio della v.a. X.

Esercizio 5 (V. 7 punti.)

Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che X abbia una distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = 1$ e Y abbia una distribuzione assolutamente continua con densità f_Y data da:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{y}} & y \in (0,4) \\ 0 & y \notin (0,4) \end{cases}$$

(a) Calcolare la funzione di ripartizione della v.a. Y.
(b) Calcolare $P(Y \leq 1)$.
(c) Calcolare $P(X \cdot Y = 0)$.
(d) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.
(e) Calcolare $P(X + Y \leq 1)$.
(f) Calcolare $\mathbb{E}[Y^{\frac{3}{2}}]$.
(g) Calcolare $\mathbb{E}[(X + Y)X)]$.