Prova d'esame di
Istituzioni di Calcolo delle Probabilità
Laurea Triennale in Scienze Statistiche.
11/12/2013

COGNOME e NOME

N. MATRICOLA.....

Esercizio 1. (V. 7 punti.)

Mescoliamo un mazzo di 8 carte, due per seme, (due carte di fiori, due di picche, due di quadri e due di cuori). Estraiamo 3 carte a caso. Sia X (risp. Y) la variabile aleatoria che indica il numero di carte di picche (risp. cuori) estratte.

- (a) Calcolare $P(X = 0)$.
- (b) Calcolare $P(X = 1)$.
- (c) Calcolare $P(X = 2)$.
- (d) Calcolare $E[X]$.
- (e) Calcolare $VAR[X]$.
- (f) Le variabili X e Y sono identicamente distribuite? Giustificare la risposta.
- (g) Le variabili X e Y sono indipendenti? Giustificare la risposta.

Esercizio 2 (V. 2 punti.)

Sia X variabile aleatoria uniforme sull'intervallo (a, b) e sia Y una variabile aleatoria di Poisson di parametro λ .

- (a) Per quali valori dei parametri a e b si ha $P(X < 1) = P(X > 2) = \frac{1}{3}$
(b) Per quali valori del parametro λ si ha $P(Y = 0) = \frac{1}{2}$

Esercizio 3 (V. 3 punti.)

Sia $X_1, X_2, \dots, X_n$ una n -upla di variabili aleatorie indipendenti con distribuzione normale $N(1, 3)$. Sia

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i, \quad W = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}, \quad T = \sum_{i=1}^n (X_i - 2)$$

- (a) Qual è la distribuzione di della v.a. Y ? Indicarne gli eventuali parametri.
- (b) Qual è la distribuzione di della v.a. W ? Indicarne gli eventuali parametri.
- (c) Qual è la distribuzione di della v.a. T ? Indicarne gli eventuali parametri.

Esercizio 4 (V. 9 punti.)

Sia (X, Y) un vettore aleatorio con distribuzione assolutamente continua con densità $f_{(X,Y)}$ data da:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \alpha(1-x)(2-y) & \text{se } 0 < x < 1, 0 < y < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (a) Calcolare α .
- (b) Calcolare la funzione di densità f_X .
- (c) Calcolare la funzione di ripartizione F_X .
- (d) Calcolare la funzione di densità f_Y .
- (e) Calcolare la funzione di ripartizione F_Y .
- (f) Le v.a. X e Y sono indipendenti? Giustificare la risposta.
- (g) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.
- (h) Calcolare $\mathbb{E}\left[\frac{Y}{1-X}\right]$.
- (i) Calcolare la probabilità $P(X < Y)$.

Esercizio 5 (V. 9 punti.)

Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che X abbia una distribuzione assolutamente continua con densità f_X data da:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{1}{6}x & x \in (0, 2) \\ 0 & x \notin (0, 2) \end{cases}$$

supponiamo che Y sia una v.a. discreta con distribuzione data da:
 $P(Y = 1) = \frac{1}{2}$, $P(Y = 2) = \frac{1}{3}$ e $P(Y = 3) = \frac{1}{6}$.

- (a) Calcolare la funzione di ripartizione della v.a. X .
- (b) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.
- (c) Calcolare $VAR[X]$.
- (d) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.
- (e) Calcolare $VAR[Y]$.
- (f) Calcolare $P(X < Y)$.
- (g) Calcolare $P(X + Y > 3)$.
- (h) Calcolare $P(X \cdot Y > 5)$.
- (i) Calcolare la funzione di rischio della v.a. X .