

Esercitazione del 22/01/2013

Istituzioni di Calcolo delle Probabilità

David Barbato

Esercizio 1

Vengono lanciati due dadi regolari a 6 facce.

- (a) Calcolare la probabilità che la somma dei valori ottenuti sia 9?
- (b) Calcolare la probabilità che la somma dei valori ottenuti sia maggiore di 9?
- (c) Calcolare la probabilità che almeno uno dei due dadi abbia dato un risultato maggiore di 4?
- (d) Calcolare la probabilità che la somma dei risultati dei due dadi sia maggiore di 9 sapendo che c'è almeno un dado con risultato maggiore di 4.

Svolgimento:

Ci sono 6 esiti possibili per il primo dado e 6 esiti possibili per il secondo dado. Quindi per il principio fondamentale del calcolo combinatorio per la coppia di risultati dei due dadi ci sono $6 \cdot 6 = 36$ esiti possibili. Infine l'ipotesi "dadi regolari" ci assicura che tutti e 36 gli esiti sono equiprobabili.

Se consideriamo le somme abbiamo il seguente schema:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Per rispondere alle domande (a), (b), (c) e (d) è sufficiente calcolare il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili.

- (a) Evidenziando in rosso i casi favorevoli si ricava:

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

- (b) $P(\text{somma dei dadi uguale a } 9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

$P(\text{somma dei dadi maggiore di 9}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
(c)

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

$P(\text{Almeno uno dei due dadi è maggiore di 4}) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$
(d)

				6	7
				7	8
				8	9
				9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

$P(\text{Somma dei dadi maggiore di 9} | \text{Almeno uno dei due dadi è maggiore di 4}) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

Esercizio 2

Calcolo delle Probabilità 03/11/2009

Da un mazzo di 52 carte vengono estratte 3 carte.

(a) Qual è la probabilità che vi sia almeno una carta inferiore (strettamente) a 3?

Soluzione: $1 - \frac{44 \cdot 43 \cdot 42}{52 \cdot 51 \cdot 50}$

Esercizio 3

Viene lanciata 8 volte una moneta regolare. Calcolare le seguenti probabilità.

(a) Qual è la probabilità che i primi due lanci siano testa?

(b) Qual è la probabilità che il terzo lancio sia croce?

(c) Qual è la probabilità che i primi 4 lanci siano testa?

(d) Qual è la probabilità che nei primi 3 lanci ci sia almeno una testa e

almeno una croce?

(e) Qual è la probabilità che tutti e 8 i lanci diano lo stesso esito?

(f) Sapendo che i primi 3 lanci hanno dato testa, qual è la probabilità che tutti e 8 i lanci abbiano dato testa?

(g) Sapendo che il terzo lancio ha dato croce, qual è la probabilità che tutti e 8 i lanci abbiano dato testa?

(h) Qual è la probabilità che nei primi 5 lanci ci siano 2 teste e 3 croci (in qualsiasi ordine)?

(i) Sapendo che tra i primi 2 lanci vi è almeno una testa, qual è la probabilità che tra i primi 2 lanci vi è almeno una croce?

(l) Sapendo che nei primi 3 lanci vi è almeno una testa, qual è la probabilità che il primo lancio abbia dato testa?

Soluzione: (a) $\frac{1}{4}$, (b) $\frac{1}{2}$, (c) $\frac{1}{16}$, (d) $\frac{3}{4}$, (e) $\frac{1}{128}$, (f) $\frac{1}{32}$, (g) 0, (h) $\frac{5}{16}$, (i) $\frac{2}{3}$, (l) $\frac{4}{7}$,

Esercizio 4

Vengono lanciati due dadi a 6 facce regolari. Calcolare le seguenti probabilità.

(a) Qual è la probabilità che siano entrambi pari?

(b) Qual è la probabilità che ci sia almeno un 5?

(c) Calcolare la probabilità che la somma sia 5.

(d) Calcolare la probabilità che la somma sia minore o uguale a 8.

(e) Calcolare la probabilità che siano entrambi minori di 6.

(f) Sapendo che la somma è uguale a 7 calcolare la probabilità che ci sia almeno un 2.

(g) Sapendo che la somma è minore o uguale a 7 calcolare la probabilità che ci sia almeno un 2.

Soluzione: (a) $\frac{1}{4}$, (b) $\frac{11}{36}$, (c) $\frac{1}{9}$, (d) $\frac{13}{18}$, (e) $\frac{25}{36}$, (f) $\frac{1}{3}$, (g) $\frac{3}{7}$,

Esercizio 5

Un contadino si affida alle previsioni metereologiche secondo le quali vi è una probabilità dell' 70% che la prossima settimana piova. Lui sa che se concimerà il suo campo, allora ci saranno un 60% di piante che seccheranno in caso che non piova mentre tale probabilità scende al 10% in caso di pioggia. Se invece decide di non concimare il suo campo ci saranno un 30% di piante che seccheranno nel caso che non piova e un 20% in caso di pioggia.

(a) Se decide di concimare il suo terreno, qual è la percentuale media di piantine che sopravviveranno?

(b) Cosa gli conviene fare se vuole massimizzare il numero medio di piantine che non seccheranno?

Soluzione: (a) 75%, (b) Se decide di non concimare la percentuale

media di piantine che sopravviveranno è del 77% dunque se vuole massimizzare la percentuale media di piantine che sopravviveranno gli conviene non concimare.

Esercizio 6

Calcolo delle Probabilità 02/07/2011

Consideriamo due urne ed una moneta truccata. La prima urna (urna A) contiene 2 palline rosse e 4 bianche, la seconda urna (urna B) contiene una pallina rossa, una bianca e una nera. Mentre la moneta truccata ha una probabilità p ($p \in [0, 1]$) di dare testa e una probabilità $1 - p$ di dare croce. Lanciamo la moneta, se esce testa estraiamo una pallina dall'urna A se esce croce estraiamo una pallina dall'urna B .

- Calcolare la probabilità che la pallina estratta sia nera? (Il risultato dipende dal parametro p .)
- Calcolare la probabilità che la pallina estratta sia rossa?
- Qual è la probabilità che la moneta abbia dato testa sapendo che la pallina estratta è bianca?
- Per quali valori di p la probabilità di estrarre una pallina bianca è $\frac{1}{2}$?
- Per quali valori di p la probabilità di estrarre una pallina rossa è $\frac{1}{3}$?
- Per quali valori di p la probabilità di estrarre una pallina nera è $\frac{1}{4}$?

Svolgimento:

Consideriamo i seguenti eventi:

T = "Il risultato del lancio della moneta è testa";

A = "La moneta viene estratta dall'urna A ";

B = "La moneta viene estratta dall'urna B ";

R = "La pallina estratta è Rossa";

N = "La pallina estratta è Nera";

B_i = "La pallina estratta è Bianca";

Le ipotesi della traccia diventano: $A = T$, $B = T^c$, $P(A) = p$, $P(B) = 1 - p$, $P(R|A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(B_i|A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $P(N|A) = 0$, $P(R|B) = \frac{1}{3}$, $P(B_i|B) = \frac{1}{3}$, $P(N|B) = \frac{1}{3}$.

$$(a) P(N) = P(N|A) \cdot P(A) + P(N|B) \cdot P(B) = \frac{1-p}{3}$$

$$(b) P(R) = P(R|A) \cdot P(A) + P(R|B) \cdot P(B) = \frac{1}{3}$$

$$(c) P(B_i) = P(B_i|A) \cdot P(A) + P(B_i|B) \cdot P(B) = \frac{1+p}{3}$$

$$\text{Utilizzando Bayes } P(T|B_i) = \frac{P(B_i|T) \cdot P(T)}{P(B_i|T) \cdot P(T) + P(B_i|T^c) \cdot P(T^c)} = \frac{2p}{p+1}$$

$$(d) \frac{1+p}{3} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{2}$$

$$(e) \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad \forall p \in [0, 1]$$

$$(f) \frac{1-p}{3} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{4}$$