Esercitazione del 29/01/2013
Istituzioni di Calcolo delle Probabilità

David Barbato

I quesiti con asterisco '$*$' saranno accessibili dalla quinta settimana di lezione.

Esercizio 1
Vengono lanciati due dadi a 6 facce regolari. Calcolare le seguenti probabilità.

(a) Qual è la probabilità che siano entrambi dispari?
(b) Qual è la probabilità che ci sia almeno un 2?
(c) Calcolare la probabilità che la somma sia 2.
(d) Calcolare la probabilità che la somma sia minore o uguale a 5.
(e) Calcolare la probabilità che siano entrambi minori di 3.
(f) Sapendo che la somma è uguale a 6 calcolare la probabilità che ci sia almeno un 2.
(g) Sapendo che la somma è minore o uguale a 6 calcolare la probabilità che ci sia almeno un 2.

Soluzione: (a) $\frac{1}{4}$, (b) $\frac{11}{36}$, (c) $\frac{1}{36}$, (d) $\frac{5}{18}$, (e) $\frac{1}{9}$, (f) $\frac{2}{5}$, (g) $\frac{7}{15}$.

Esercizio 2 Una mensa universitaria offre 5 diversi primi, 4 diversi secondi e 3 diverse bibite. Supponiamo che ciascuno studente scelga in maniera casuale e indipendente un primo, un secondo ed una bibita.
(a) Scelti due studenti, qual è la probabilità che abbiano fatto la stessa ordinazione (stesso primo, stesso secondo e stessa bibita)?
(b) In un tavolo di dieci persone, qual è la probabilità che ci siano almeno due persone che hanno fatto la stessa ordinazione?
(c) Per festeggiare l'inizio dell'anno accademico viene offerto agli studenti un bicchiere di vino rosso o bianco a scelta. Da una statistica risulta che tra coloro che hanno scelto un secondo di carne il 70% sceglie il vino rosso e il 30% il vino bianco, viceversa tra coloro che hanno scelto il secondo di pesce il 70% sceglie il vino bianco e il 30% sceglie quello rosso. Sapendo che ci sono tre secondi di carne e uno di pesce e supponendo che ciascuno studente sceglie il proprio secondo in maniere casuale tra i 4 piatti possibili qual è la probabilità che uno studente che beve vino rosso abbia scelto il secondo di carne?

Svolgimento: (a) Le combinazioni possibili di primo, secondo e bibita sono $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Per la casualità e l'indipendenza delle scelte si ha che cias-

cuna delle possibili combinazioni di primo, secondo e bibita ha probabilità 1/60.
Indichiamo con i numeri da 1 a 60 le possibili ordinazioni e chiamiamo X_1 e X_2 le ordinazioni del primo e del secondo studente. Bisogna calcolare $P(X_1 = X_2)$.

$$P(X_1 = X_2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) + P(X_1 = 2, X_2 = 2) + \cdots + P(X_1 = 60, X_2 = 60)$$
$$P(X_1 = X_2) = \frac{1}{3600} + \frac{1}{3600} + \cdots + \frac{1}{3600}$$
$$P(X_1 = X_2) = \frac{1}{60}$$

Dunque la probabilità che due persone abbiano ordinato le stesse cose è 1/60.
(b) Consideriamo l'evento $A :=$ "ci sono almeno due persone con la stessa ordinazione e l'evento $B := A^c =$ "tutte e dieci le persone hanno fatto ordinazioni diverse". Allora si ha $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(B)$. Per calcolare $\mathbb{P}(B)$ è sufficiente calcolare il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili.
"Casi favorevoli"$= 60 \cdot 59 \cdot \ldots \cdot 51$
"Casi possibili"$= 60^{10}$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{60 \cdot 59 \cdot \ldots \cdot 51}{60^{10}}$$
$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{60 \cdot 59 \cdot \ldots \cdot 51}{60^{10}}$$

(c) Denotiamo con A_1 A_2 ed E gli eventi:
$A_1 :=$ "È stato scelto un secondo di carne"
$A_2 :=$ "È stato scelto un secondo di pesce"
$E :=$ "È stato scelto del vino rosso".
Le ipotesi sono:

$$P(A_1) = \frac{3}{4} \qquad P(A_2) = \frac{1}{4} \qquad P(E|A_1) = 0.7 \qquad P(E|A_2) = 0.3$$

La tesi è calcolare

$$P(A_1|E)$$

Dalla formula di Bayes

$$P(A_1|E) = \frac{P(A_1)P(E|A_1)}{P(A_1)P(E|A_1) + P(A_2)P(E|A_2)} = \frac{7}{8} = 87.5\%$$

Esercizio 3
Viene lanciato un dado regolare (a 6 facce) e poi viene lanciata una moneta regolare tante volte quanto il risultato del lancio del dado. Calcolare le

seguenti probabilità.
(a) Qual è la probabilità che la moneta sia lanciata 3 volte.(esattamente 3 volte)
(b) Qual è la probabilità che la moneta sia lanciata almeno 3 volte.
(c) Qual è la probabilità che il primo lancio dia "testa"?
(d) Qual è la probabilità che l'ultimo lancio dia "croce"?
(e) Se supponiamo di sapere che il risultato del dado sia "3", qual è la probabilità che sia uscita "testa" 3 volte?
(f) Qual è la probabilità che il dado abbia dato "3" e sia uscita "testa" 3 volte?
(g) Se supponiamo di sapere che il dado ha dato "4", qual è la probabilità che si sia uscita due volte "testa" e due volte "croce"?
(h) Qual è la probabilità che non si ottenga mai "testa"?
(i) Qual è la probabilità che non si ottenga mai "testa", sapendo che il dado ha dato un esito minore di 3?
(l) Qual'è la probabilità che il numero di "teste" sia maggiore del numero di "croci"?

Soluzione: (a) $\frac{1}{6}$, (b) $\frac{2}{3}$, (c) $\frac{1}{2}$, (d) $\frac{1}{2}$, (e) $\frac{1}{8}$, (f) $\frac{1}{48}$, (g) $\frac{3}{8}$, (h) $\frac{63}{384}$, (i) $\frac{3}{8}$, (l) $\frac{77}{192}$,

Esercizio 4 È noto che la probabilità che un uomo sia daltonico è del 7%, mentre la probabilità che una donna sia daltonica è solo dello 0.5%. Considerato un gruppo di 30 persone costituito da 10 uomini e 20 donne scelti a caso:
(a) Qual è la probabilità che nel gruppo non ci siano persone daltoniche?
(b) Qual è la probabilità che nel gruppo ci siano esattamente un uomo daltonico e nessuna donna daltonica?
(c) Indichiamo con Z il numero totale di persone daltoniche del gruppo. Qual è il valor medio di Z?
(d) Scelta a caso una persona nel gruppo, qual è la probabilità che sia un uomo sapendo che si tratta di una persona daltonica?

Svolgimento:
Siano X_1, ... ,X_{20} variabili aleatorie associate alle 20 donne con $X_i = 1$ se la i-esima donna è daltonica e $X_i = 0$ se la i-esima donna non è daltonica.
Siano Y_1, ... ,Y_{10} variabili aleatorie con $Y_i = 1$ se l'i-esimo uomo è daltonico e $Y_i = 0$ se l'i-esimo uomo non è daltonico.
Le X_i e Y_i costituiscono una famiglia di variabili aleatorie indipendenti con distribuzione bernoulliana, le X_i sono bernoulliane di parametro $p_1 = 0.005$ mentre le Y_i sono bernoulliane di parametro $p_2 = 0.07$

(a)

$$\begin{aligned}
&P(\text{"non ci sono persone daltoniche nel gruppo"}) = \\
&= P(X_1 = 0, ..., X_{20} = 0, Y_1 = 0, ..., Y_{10} = 0) = \\
&= P(X_1 = 0) \cdot ... \cdot P(X_{20} = 0) \cdot P(Y_1 = 0) \cdot ... \cdot P(Y_{10} = 0) = \\
&= (1 - 0.005)^{20} \cdot (1 - 0.07)^{10} \simeq 0.4378
\end{aligned}$$

(b) Indichiamo con X e Y rispettivamente il numero totale di donne e uomini daltonici del gruppo, cioè $X = X_1 + ... + X_{20}$ e $Y = Y_1 + ... + Y_{10}$. Le variabili X, Y quali somme di variabili aleatorie bernoulliane indipendenti sono variabili aleatorie con distribuzion binomiale, $X \sim Bin(0.005, 20)$ e $Y \sim Bin(0.07, 10)$
La probabilità che nel gruppo ci siano esattamente un uomo daltonico e nessuna donna daltonica è $P(X = 0, Y = 1)$.

$$\begin{aligned}
&P(X = 0, Y = 1) = P(X = 0) \cdot P(Y = 1) \\
&P(X = 0) = \binom{20}{0} \cdot (1 - 0.005)^{20} = 0.9046 \\
&P(Y = 1) = \binom{10}{1} \cdot (1 - 0.07)^{9} \cdot 0.07^{1} = 0.3643 \\
&P(X = 0, Y = 1) \simeq 0.33
\end{aligned}$$

(c) $E[Z] = E[X + Y] = E[X] + E[Y] = 20 * 0.005 + 10 * 0.07 = 0.8$
(d) Denotiamo con F (risp. M) l'evento la persona scelta a caso è una donna (risp. un uomo), denotiamo con D l'evento si tratta di una persona daltonica. Dalle ipotesi si ha: $P(F) = \frac{2}{3}$, $P(M) = \frac{1}{3}$, $P(D|F) = 0.005$, $P(D|M) = 0.07$
Per calcolare $P(M|D)$ utilizziamo la formula di Bayes.

$$P(M|D) = \frac{P(D|M) \cdot P(M)}{P(D|M) \cdot P(M) + P(D|F) \cdot P(F)} = \frac{0.07 \cdot \frac{1}{3}}{0.07 \cdot \frac{1}{3} + 0.005 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{7}{8}$$

Esercizio 5

`Istituzioni di Calcolo delle Probabilità 01/09/2011`

`Se possibile, indicare i risultati sotto forma di frazioni`

Alessia e Daniele possiedono due dadi a sei facce. Il dado di Daniele è regolare mentre quello di Alessia è truccato. Indichiamo con A il risultato del lancio del dado di Alessia e con D il risultato del lancio del dado di Daniele. Supponiamo infine che il dado di Alessia abbia la seguente distribuzione: $P(A = 6) = 0.3$, $P(A = 5) = 0.2$, $P(A = 4) = 0.2$, $P(A = 3) = 0.1$, $P(A = 2) = 0.1$, $P(A = 1) = 0.1$.

(a) Calcolare $P(A > 3)$.

(b) Calcolare $\mathbb{E}[A]$.

(c) Calcolare $P(D > 3)$.

(d) Calcolare $P(A = 6, D = 6)$.

(e) Calcolare $P(A = 5, D = 4)$.

(f) Calcolare $P(A > 3, D > 3)$.

(g) Calcolare $P(A = 6|A > 3)$.

(h) Calcolare $P(A = 6|D > 3)$.

(i) Calcolare $P(A + D = 11)$.

(l) Calcolare $P(A \cdot D > 20)$.

(m) Calcolare $P(A > D)$.

(n) Calcolare $P(A = 6|A > D)$.

Soluzione:

	A	L	E	S	S	I	A
D		1	2	3	4	5	6
A	1	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{3}{60}$
N	2	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{3}{60}$
I	3	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{3}{60}$
E	4	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{3}{60}$
L	5	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{3}{60}$
E	6	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{3}{60}$

(a) $\frac{7}{10}$, (b) $\frac{21}{5}$, (c) $\frac{1}{2}$, (d) $\frac{1}{20}$, (e) $\frac{1}{30}$, (f) $\frac{7}{20}$, (g) $\frac{3}{7}$, (h) $\frac{3}{10}$, (i) $\frac{1}{12}$, (l) $\frac{1}{4}$, (m) $\frac{8}{15}$, (n) $\frac{15}{32}$

Esercizio 6

`Calcolo delle Probabilità 18/12/2010`

Ci sono 10 monetine di cui 5 con due teste, 2 con due croci e 3 regolari (una moneta regolare ha una faccia testa e una faccia croce e la probabilità che esca testa è uguale a quella che esca croce).
(a) Se vengono lanciate tutte e dieci le monete, qual è la probabilità che ci siano più teste che croci.
(b) Scelta una moneta a caso ed effettuato un lancio, qual è la probabilità che dia croce.
(c) Scelta una moneta a caso ed effettuato un lancio, qual è la probabilità che sia una moneta regolare sapendo che il risultato del lancio è croce.
(d)* Scelgo una moneta a caso ed effettuo 100 lanci, stimare la probabilità che si realizzino più di 60 teste. `(Lancio sempre la stessa moneta.)`

Soluzione: (a) $\frac{7}{8}$, (b) $\frac{7}{20}$, (c) $\frac{3}{7}$, (d) $\frac{1}{2} + \frac{3}{10}(1 - \Phi(2.1)) \simeq 0.50536$

Esercizio 7

`Istituzioni di Calcolo delle Probabilità 01/07/2011`

`Se possibile, indicare i risultati sotto forma di frazioni`

Consideriamo due mazzi di carte. Il primo mazzo (A) è costituito da 6 carte con i numeri $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mentre il secondo mazzo (B) è costituito da 8 carte con i numeri $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Scegliamo un mazzo a caso e estraiamo una carta a caso dal mazzo.

(a) Qual è la probabilità che la carta estratta sia un 2?

(b) Qual è la probabilità che la carta estratta sia un 10?

(c) Qual è la probabilità che la carta estratta sia un 4?

(d) Qual è la probabilità che la carta estratta sia minore (stretto) di 5?

(e) Sapendo che la carta estratta è un 3, qual è la probabilità che sia stata estratta dal mazzo A?

(f) Sapendo che la carta estratta è minore (stretto) di 5, qual è la probabilità che sia stata estratta dal mazzo A?

(g) Sia X_A il valore di una carta estratta a caso dal mazzo A. Quanto vale

$\mathbb{E}[X_A]$? $\boxed{}$

(h) Sia X_B il valore di una carta estratta a caso dal mazzo B. Quanto vale $\mathbb{E}[X_B]$? $\boxed{}$

(i)* Scegliamo un mazzo a caso ed estraiamo una carta a caso. Indichiamo con X il valore della carta. Quanto vale $\mathbb{E}[X]$? $\boxed{}$

Soluzione: (a) $\frac{1}{12}$, (b) $\frac{1}{16}$, (c) $\frac{7}{48}$, (d) $\frac{11}{24}$, (e) $\frac{4}{7}$, (f) $\frac{8}{11}$, (g) $\frac{7}{2}$, (h) $\frac{13}{2}$, (i) 5.

Esercizio 8

`Calcolo delle Probabilità 13/01/2011`

Una società costruisce microprocessori. Un microprocessore può presentare 2 tipi di malfunzionamenti, (indipendenti e sovrapponibili).
I malfunzionamenti di tipo 1 hanno probabilità $p_1 = 4\%$
I malfunzionamenti di tipo 2 hanno probabilità $p_2 = 0.5\%$
Inoltre la società effettua un test sui processori prodotti in grado di individuare un malfunzionamento di tipo 1 con una probabilità del 95%.
(a) Qual è la probabilità che un microprocessore presenti entrambi i tipi di malfunzionamento?
(b) Qual è la probabilità che un microprocessore superi il test?
(c) Sapendo che un microprocessore ha superato il test, qual è la probabilità che non presenti malfunzionamenti.
(d) Su mille microprocessori che hanno superato il test qual è il numero medio di microprocessori malfunzionanti?
(e)* Su mille microprocessori che hanno superato il test (stimare) qual è la probabilità che ce ne siano più di 10 malfunzionanti?
Soluzione: (a) $\frac{1}{5000}$, (b) 96.2%, (c) $\frac{96 \cdot 995}{100 \cdot 962} \simeq 0.99293$ (d) $\simeq 7.07$
(e) $\simeq 1 - \Phi(1.29) \simeq 9.85\%$