

Esercitazione del 5/02/2013

Istituzioni di Calcolo delle Probabilità

David Barbato

Questa raccolta comprende sia gli esercizi dell'esercitazione del 5 febbraio sia gli esercizi di ricapitolazione sulle variabili aleatorie discrete. I quesiti con asterisco '*' saranno accessibili solo dalla quinta settimana di lezione.

Esercizio 1. *Una nota concessionaria automobilistica vende 3 diversi modelli di autovetture, disponibili in 5 colori e 3 possibili cilindrata (1900 cc, 2000 cc e 2200 cc). Supponendo che ciascuna combinazione di modello, colore e cilindrata abbia la stessa probabilità di essere scelta da un cliente, calcolare:*

- (a) quante sono le possibili combinazioni di modello, colore e cilindrata?*
- (b) qual è la probabilità che due diversi clienti abbiano ordinato la stessa autovettura (stesso modello, colore e cilindrata)?*
- (c) Se in una settimana sono state vendute 6 autovetture, qual è la probabilità che siano state vendute almeno due autovetture uguali (stesso modello, colore e cilindrata)?*

Da una statistica risulta che il 60% dei clienti che acquistano un'autovettura di cilindrata massima (2200 cc) sceglie di avere il climatizzatore automatico, mentre questa percentuale scende al 45% per le auto di cilindrata inferiore (1900 cc e 2000 cc).

- (d) Se in un anno sono state vendute 100 autovetture qual è il valore atteso di autovetture vendute dotate di climatizzatore automatico?*
- (e) Qual è la probabilità che sia stata venduta un'autovettura con cilindrata massima sapendo che è dotata di climatizzatore automatico?*

Esercizio 2. *Una nota società assicurativa ha $N = 250000$ assicurati, di cui 150000 uomini e 100000 donne. Da una statistica risulta che la probabilità di un uomo di avere un incidente grave in un anno è del 3% mentre questa probabilità scende a 1.5% per le donne.*

- (a) Calcolare la probabilità che una persona assicurata (scelta a caso) abbia un incidente grave nel prossimo anno?*
- (b) Sapendo che una persona assicurata ha avuto un incidente grave qual è la probabilità che si tratti di un uomo?*
- (c) Calcolare la media e la varianza del numero complessivo di assicurati che hanno un incidente grave in un anno?*

La società assicuratrice ha stimato che se il numero di assicurati che hanno un incidente grave il prossimo anno supera 6200 allora la società andrà in perdita.

- (d)* Stimare (utilizzando l'approssimazione gaussiana) la probabilità che il numero di assicurati che hanno un incidente grave il prossimo anno superi 6200.*

Esercizio 3. *Nel comune di Padova sono presenti 2500 lampioni, di cui 1000 nel centro storico e 1500 fuori dal centro storico. Ciascun lampione è provvisto di una lampadina che ha una probabilità $p = \frac{1}{1000}$ di fulminarsi durante una notte. Supponiamo che tale probabilità sia indipendente dallo stato*

di usura della lampadina e inoltre che ogni mattina avvenga la sostituzione di tutte le lampadine che si sono fulminate durante la notte.

(a) Qual è la probabilità che durante la notte non si fulmini nessuna lampadina? (Scrivere la formula.)

(b) Sapendo che durante la notte si è fulminata una sola lampadina, qual è la probabilità che sia una lampadina del centro storico?

(c) Qual è il numero medio e la varianza del numero totale di lampadine fulminate in un anno (365 giorni)?

(d)* La ditta che ha avuto l'appalto per la sostituzione delle lampadine nel 2009 ha acquistato 950 lampadine per le sostituzioni. Calcolare la probabilità che siano sufficienti. (Utilizzare l'approssimazione normale.)

Esercizio 4. Un docente ha 70 studenti. Ogni volta che il docente fa ricevimento ciascuno studente può andarci o no, con probabilità p e $1 - p$ rispettivamente. Supponiamo $p = 0.01$ e assumiamo che ciascuno studente scelga di andare o no a ricevimento in maniera indipendente dagli altri.

(a) Indicare qual è la distribuzione del numero di studenti che si presentano ad ogni ricevimento e calcolarne la media.

(b) Qual è la probabilità che ad un fissato ricevimento non si presenti nessuno studente?

(c) Nel corso dell'anno vi sono 50 ricevimenti. Sia T il numero di ricevimenti in cui non si presenta nessuno. Calcolare il valore medio e la varianza di T .

(d)* Stimare la probabilità che vi siano 30 o più ricevimenti in cui non si presenti nessuno. (Utilizzare l'approssimazione normale.)

Esercizio 5. La pizzeria "Da Gigi" vende pizze da asporto e bibite. Il numero di pizze vendute in un giorno di apertura è una variabile aleatoria con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda_1 = 40$, mentre il numero di bibite vendute in un giorno si distribuisce come una variabile di Poisson di parametro $\lambda_2 = 0.5$. Consideriamo inoltre il numero di bibite e pizze vendute in giorni diversi come variabili aleatorie indipendenti.

(a) Calcolare la probabilità che in un giorno scelto a caso (tra quelli in cui la pizzeria è aperta) venga venduta una sola bibita.

(b) In una settimana lavorativa di 6 giorni, qual è la probabilità che vengano vendute almeno 3 bibite?

(c) Il prossimo anno la pizzeria "Da Gigi" rimarrà aperta 255 giorni, calcolare la media e la varianza del numero totale di pizze vendute in un anno.

(d)* Gigi, che è un pizzaiolo parsimonioso, ha deciso che per il prossimo anno metterà da parte 50 centesimi per ogni pizza venduta. Stimare la probabilità che in un anno (255 giorni lavorativi) Gigi riesca a mettere da parte più di 5000 euro.

Esercizio 6. Nel gioco del superenalotto, giocando una sestina qualsiasi la probabilità di fare 3 è circa $p_3 = 0.0031$.

(a) Se Alfredo gioca due sestine (la giocata minima) ogni concorso (ci sono due concorsi a settimana) per 6 anni, quante volte farà 3 in media?

(b) Stimare la probabilità che in 6 anni non realizzi mai 3.

(c) La probabilità di fare 6 è circa una su 623 milioni. Stimare, utilizzando l'approssimazione Poissoniana, la probabilità che Alfredo realizzi almeno un 6.

(d) Supponiamo che in un concorso vengano giocate 5 milioni di sestine (indipendenti e scelte in maniera casuale). Calcolare la media e la varianza del numero di 3 realizzati.

(e)* Stimare la probabilità che giocando 6 milioni di sestine si realizzino più di 19000 tre. (Utilizzare l'approssimazione gaussiana.)

Esercizio 7. Una società assicurativa ha assicurato 200.000 autovetture: 140.000 di grossa cilindrata e 60.000 di piccola cilindrata. Da una statistica interna condotta dalla società risulta che una macchina di grossa cilindrata ha una probabilità $p_1 = \frac{1}{70}$ di avere un incidente grave entro un anno, mentre per le auto di piccola cilindrata questa probabilità è $p_2 = \frac{1}{150}$. Supponiamo infine che gli incidenti siano indipendenti tra di loro.

(a) Qual è il valore medio e la varianza del numero totale di assicurati che avranno un incidente grave il prossimo anno?

(b) Se un'autovettura assicurata ha un incidente grave qual è la probabilità che si tratti di un'auto di grossa cilindrata?

La società assicuratrice ha stimato che se il numero di assicurati che hanno un incidente grave il prossimo anno supera 2.500 allora la società andrà in perdita.

(c)* Stimare (utilizzando l'approssimazione gaussiana) la probabilità che il numero di assicurati che hanno un incidente grave il prossimo anno superi 2.500.

(d)* Supponendo che nei prossimi dieci anni il numero di assicurati rimanga costante e che anche le probabilità di avere incidenti rimangano costanti e siano ancora indipendenti.

Calcolare la media e la varianza del numero di incidenti complessivi provocati dagli assicurati nei prossimi 10 anni? Qual è la probabilità che tale numero superi 25.000.

Esercizio 8. Un'azienda produce componenti per autovetture. Da una statistica risulta che lo 0.2% dei componenti presenta un difetto di livello 1 e lo 0.1% presenta un difetto di livello 2, mentre il restante 99.7% non presenta difetti. Sappiamo inoltre che durante la fase di rodaggio un componente con un difetto di livello 1 ha una probabilità di rompersi del 65% mentre questa stessa probabilità sale al 90% per i difetti di livello 2.

(a) Qual è la probabilità che un componente scelto a caso si rompa durante la fase di rodaggio?

(b) Se un componente si rompe durante la fase di rodaggio, qual è la probabilità che abbia un difetto di livello 1?

(c) L'azienda nel mese di Dicembre ha prodotto 60000 componenti. Qual è la media e la varianza del numero di questi componenti che si romperà durante la fase di rodaggio?

(d)* Stimare la probabilità che durante il rodaggio (dei 60000 componenti) ci siano più di 150 rotture.

Esercizio 9. In uno dei suoi celebri esperimenti, Mendel esaminò il colore di 580 piante di piselli. Supponiamo che ciascuna pianta di piselli abbia una probabilità $p = \frac{1}{4}$ di avere i frutti gialli, e che tali probabilità siano indipendenti.

(a) Calcolare la media e la varianza del numero totale di piante di piselli gialle.

(b)* Stimare, utilizzando l'approssimazione normale, la probabilità che il numero totale di piante dai frutti gialli sia (strettamente) compreso tra 120 e 180.

(c)* Mendel osservò 152 piante dai frutti gialli. Calcolare la probabilità che il numero totale di piante dai piselli gialli sia 152. Dapprima utilizzare la distribuzione binomiale (scrivere solo la formula) e poi stimare tale probabilità utilizzando l'approssimazione normale.

(d)* Supponendo che la probabilità di avere frutti gialli fosse stata invece $p = \frac{1}{2}$ quale sarebbe stata la probabilità di osservare un numero di piante dai frutti gialli compreso tra 120 e 180?

Esercizio 10. In un'agenzia di vendite porta a porta, lavorano 5 rivenditori, di cui 2 sono esperti e 3 sono neoassunti. Ogni dipendente visita 20 clienti al giorno. Un rivenditore esperto, ogni volta che visita un cliente ha una probabilità di vendita $p_1 = \frac{1}{20}$, mentre questa probabilità scende a $p_2 = \frac{1}{40}$ per i neoassunti.

(a) Sia X il numero di vendite effettuate da un rivenditore esperto in un giorno, indicare la media, la varianza e la distribuzione di X .

(b) Qual è la media e la varianza del numero di vendite effettuate dai 5 rivenditori in un giorno lavorativo? Qual è la media e la varianza del numero di vendite effettuate dai 5 rivenditori in un mese di 20 giorno lavorativi?

(c)* Stimare qual è la probabilità che il numero totale di vendite nel mese di Marzo (20 giorni lavorativi) superi 80.

(d) Se oggi è stata effettuata una sola vendita qual è la probabilità che sia stata effettuata da un neoassunto.

Esercizio 11. Nel 2008, in Veneto, sono stati celebrati 30000 matrimoni. Assumiamo che ciascun coniuge sia nato in un giorno a caso tra i 365 dell'anno (stiamo supponendo che nessuno sia nato il 29 febbraio). E supponiamo inoltre che tali eventi siano indipendenti.

(a) Calcolare il numero medio di coppie in cui entrambi i coniugi sono nati il 25 dicembre.

(b) Calcolare il numero medie di coppie che festeggiano il compleanno lo stesso giorno.

(c)* Stimare la probabilità che il numero di coppie che festeggia il compleanno lo stesso giorno sia superiore a 100.

Esercizio 12. Fiore e Fortunata giocano con una monetina (regolare). Fiore effettua 2 lanci e Fortunata effettua 3 lanci. Indichiamo con X_1 e X_2 il numero di croci realizzate da Fiore rispettivamente Fortunata.

(a) Quali sono le distribuzioni di X_1 e X_2 ?

(b) Quanto valgono $\mathbb{E}[X_1]$, $\mathbb{E}[X_2]$ e $\mathbb{E}[X_1 \cdot X_2]$

(c) Fortunata vince se realizza più croci di Fiore, mentre Fiore vince se realizza un numero di croci maggiore o uguale a quello di Fortunata. Qual è la probabilità che Fiore vinca la sfida?

(d) Sia n un intero maggiore di 0. Supponiamo ora che Fiore effettui n lanci (invece di 2) e Fortunata effettui $n+1$ lanci (invece di 3). Fortunata vince la sfida se realizza più croci di Fiore, mentre Fiore vince se realizza un numero di croci maggiore o uguale a quello di Fortunata. Per quali valori di n la probabilità di vincere di Fortunata è maggiore di quella di Fiore? Per quali valori di n le due probabilità sono uguali?

Esercizio 13. Ruggero e Lorenzo giocano a freccette. Supponiamo che per ogni lancio abbiano entrambi il 60% di probabilità di colpire il bersaglio: Ruggero ha il 20% di probabilità di fare 100 punti, il 20% di fare 50 punti e il 20% di fare 25 punti; mentre Lorenzo ha il 10% di probabilità di fare 100 punti, il 20% di fare 50 punti e il 30% di fare 25 punti. Entrambi lanciano due freccette e poi sommano i punti. Indichiamo con X_1 , X_2 e X (risp. Y_1, Y_2, Y) il risultato del primo, del secondo e della somma dei lanci effettuati da Ruggero (risp. Lorenzo).

(a) Qual è la probabilità che Ruggero realizzi in totale zero punti?

(b) Qual è la probabilità che Ruggero realizzi in totale 75 punti?

(c) Qual è la probabilità che Ruggero realizzi in totale 100 punti?

(d) Quale è la distribuzione di X ? (Verificare che la somma delle probabilità sia effettivamente 1.)

(e) Quale è la distribuzione di Y ?

Esercizio 14. Sia X una variabile aleatoria binomiale di parametri $p = \frac{1}{2}$ e $n = 31$:

(a) Calcolare $\mathbb{E}[2X + 3]$.

(b) Calcolare $\text{VAR}[2X + 3]$.

(c)* Stimare $P(X \geq 17)$. (Utilizzare l'approssimazione gaussiana con la correzione di continuità)

Esercizio 15. Se possibile, indicare i risultati sotto forma di frazioni

In un sacchetto ci sono 4 monete: 3 monete regolari ed una con due teste.

(a) Estraggo una moneta a caso, qual è la probabilità che sia una moneta regolare?

(b) Estraggo due monete senza reinserimento, qual è la probabilità che siano entrambe moneta regolare?

(c) Estraggo due monete con reinserimento, (Eseguo la prima estrazione, reinserisco la moneta nell'urna e poi eseguo la seconda estrazione.) Qual è la probabilità che siano entrambe moneta regolare?

(d) Estraggo una moneta a caso e la lancio, qual è la probabilità che dia testa?

(e) Estraggo una moneta a caso e la lancio, se il risultato del lancio è testa, qual è la probabilità che sia una moneta regolare?

(f) Estraggo una moneta a caso e la lancio, se il risultato del lancio è croce, qual è la probabilità che sia una moneta regolare?

(g) Lancio tutte e quattro le monete del sacchetto qual è il numero medio di teste ottenute?

(h) Lancio tutte e quattro le monete del sacchetto qual è la varianza del numero di teste ottenute?

(i) Ripeto 100 volte la seguente procedura: estrazione di una moneta, lancio e reinserimento della moneta nel sacchetto. Qual è il numero medio e la varianza di teste ottenute nei 100 lanci.

(l)* Nelle ipotesi del quesito (i) qual è la probabilità che si realizzino più di 60 teste?

1 Soluzioni

Esercizio 1 (a) Utilizzando il principio fondamentale del calcolo combinatorio si ha che le combinazioni possibili di modello, colore e cilindrata sono $5 \cdot 3 \cdot 3 = 45$.

(b) Indicando con i numeri da 1 a 45 le 45 scelte possibili e denotando con X_1 e X_2 le autovetture scelte dal primo e secondo cliente, la probabilità cercata è $P(X_1 = X_2)$.

$$P(X_1 = X_2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) + P(X_1 = 2, X_2 = 2) + \dots + P(X_1 = 45, X_2 = 45)$$

$$P(X_1 = X_2) = \overbrace{\frac{1}{45 \cdot 45} + \frac{1}{45 \cdot 45} + \dots + \frac{1}{45 \cdot 45}}^{45 \text{ volte}} = \frac{1}{45}$$

(c) Consideriamo l'evento $A :=$ "ci sono almeno due clienti che hanno comprato la stessa autovettura e l'evento $B := A^c =$ "tutti e 6 i clienti hanno scelto autovetture diverse". Allora si ha $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(B)$. Per calcolare $\mathbb{P}(B)$ è sufficiente calcolare il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili.

"Casi favorevoli" = $45 \cdot 44 \cdot \dots \cdot 40$

"Casi possibili" = 45^6

$$\mathbb{P}(B) = \frac{45 \cdot 44 \cdot \dots \cdot 40}{45^6}$$

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{45 \cdot 44 \cdot \dots \cdot 40}{45^6} \cong 0.294 = 29.4\%$$

(d) Denotiamo con $(Y_i)_{i \in \{1, 2, \dots, 100\}}$ le variabili aleatorie così definite:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{l'iesima autovettura ha il climatizzatore automatico.} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{100}$ denota il numero totale di autovetture con climatizzatore automatico vendute. Il valore atteso di autovetture vendute è dato da $E[Y] = E[Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{100}] = E[Y_1] + E[Y_2] + \dots + E[Y_{100}]$

$$E[Y_i] = P(Y_i = 1) = \frac{1}{3} \cdot 0.60 + \frac{2}{3} \cdot 0.45 = 0.5$$

dunque

$$E[Y] = E[Y_i] \cdot 100 = 0.5 \cdot 100 = 50$$

(e) Consideriamo gli eventi:

A_1 := "È stata scelta un'autovettura di cilindrata 2200cc"

A_2 := "È stata scelta un'autovettura di cilindrata 1900cc oppure 2000 cc"

E := "È stato scelto il climatizzatore automatico".

Le ipotesi sono:

$$P(A_1) = \frac{1}{3} \quad P(A_2) = \frac{2}{3} \quad P(E|A_1) = 0.60 \quad P(E|A_2) = 0.45$$

La tesi è calcolare

$$P(A_1|E)$$

Dalla formula di Bayes

$$P(A_1|E) = \frac{P(A_1)P(E|A_1)}{P(A_1)P(E|A_1) + P(A_2)P(E|A_2)} = \frac{2}{5} = 40\%$$

Esercizio 2

Sia U l'evento l'assicurato è un uomo

D l'evento l'assicurato è un donna

I l'evento l'assicurato avrà un incidente nel prossimo anno.

Per ipotesi $P(U) = 150000/250000 = 0.60 = 60\%$,

$P(D) = 100000/250000 = 0.40 = 40\%$,

$P(I|U) = 3\% = 0.03$ e $P(I|D) = 1.5\% = 0.015$

(a) $P(I) = P(I \cap U) + P(I \cap D) = P(I|U) \cdot P(U) + P(I|D) \cdot P(D) = 0.03 \cdot 0.60 + 0.015 \cdot 0.40 = 0.024$

(b) Utilizziamo la formula di Bayes:

$$P(U|I) = \frac{P(I|U) \cdot P(U)}{P(I|U) \cdot P(U) + P(I|D) \cdot P(D)} = \frac{0.018}{0.024} = \frac{3}{4} = 75\%$$

(c) Siano $(X_i)_{i \in \{1,2,\dots,100000\}}$ e $(Y_i)_{i \in \{1,2,\dots,150000\}}$ le seguenti variabili:

$X_i = \begin{cases} 1 & \text{l'iesima donna assicurata avrà un incidente il prossimo anno} \\ 0 & \text{l'iesima donna assicurata non avrà un incidente il prossimo anno} \end{cases}$

$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{l'iesimo uomo assicurato avrà un incidente il prossimo anno} \\ 0 & \text{l'iesimo uomo assicurato non avrà un incidente il prossimo anno} \end{cases}$

$(X_i)_{i \in \{1,2,\dots,100000\}}$ famiglia di variabili aleatorie indipendenti bernoulliane di parametro 0.015

$(Y_i)_{i \in \{1,2,\dots,150000\}}$ famiglia di variabili aleatorie indipendenti bernoulliane di parametro 0.03

Il numero totale di incidenti del prossimo anno sarà

$$T = \sum_{i=1}^{100000} X_i + \sum_{i=1}^{150000} Y_i$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{100000} X_i + \sum_{i=1}^{150000} Y_i\right] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \dots + X_{100000}] + \mathbb{E}[Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{150000}] = \\
&= \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \dots + \mathbb{E}[X_{100000}] + \mathbb{E}[Y_1] + \mathbb{E}[Y_2] + \dots + \mathbb{E}[Y_{150000}] = \\
&= \overbrace{0.015 + 0.015 + \dots + 0.015}^{100000 \text{ volte}} + \overbrace{0.03 + 0.03 + \dots + 0.03}^{150000 \text{ volte}} = \\
&= 100000 \cdot 0.015 + 150000 \cdot 0.03 = 6000 \\
\text{VAR}[T] &= \text{VAR}\left[\sum_{i=1}^{100000} X_i + \sum_{i=1}^{150000} Y_i\right] = \\
&= \text{VAR}[X_1 + X_2 + \dots + X_{100000}] + \text{VAR}[Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{150000}] = \\
&= \text{VAR}[X_1] + \text{VAR}[X_2] + \dots + \text{VAR}[X_{100000}] + \text{VAR}[Y_1] + \text{VAR}[Y_2] + \dots + \text{VAR}[Y_{150000}] = \\
&= \overbrace{0.015 \cdot (1 - 0.015) + 0.015 \cdot (1 - 0.015) + \dots + 0.015 \cdot (1 - 0.015)}^{100000 \text{ volte}} + \\
&\quad + \overbrace{0.03 \cdot (1 - 0.03) + 0.03 \cdot (1 - 0.03) + \dots + 0.03 \cdot (1 - 0.03)}^{150000 \text{ volte}} = \\
&= 100000 \cdot 0.015 \cdot (1 - 0.015) + 150000 \cdot 0.03 \cdot (1 - 0.03) = 5842.5
\end{aligned}$$

Un altro approccio possibile per la risoluzione del punto (c) poteva essere quello di considerare le variabili aleatorie X e Y , $X := \sum_{i=1}^{100000} X_i$ e $Y := \sum_{i=1}^{150000} Y_i$. X e Y sono variabili aleatorie binomiali indipendenti, la X di parametri 100000 e 0.015 e la Y di parametri 150000 e 0.03. Dunque $\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ e $\text{VAR}[T] = \text{VAR}[X] + \text{VAR}[Y]$.

(d) Sia $\mu = \mathbb{E}[T] = 6000$ e sia $\sigma = \sqrt{\text{VAR}[T]} = 76.436$. Approssimare T con una variabile aleatoria gaussiana vuol dire scegliere una variabile aleatoria gaussiana W con la stessa media e varianza di T cioè $W \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \sim \mathcal{N}(6000, 5842.5)$. Utilizzando l'approssimazione di continuità la probabilità cercata diventa:

$$P(T > 6200) \approx P(W > 6200.5)$$

per ricondursi ad una normale standard si utilizza l'approccio usuale di sottrarre la media e dividere per la deviazione standard.

$$P(W > 6200.5) = P\left(\frac{W - \mu}{\sigma} > \frac{6200.5 - \mu}{\sigma}\right)$$

Sia $Z := \frac{W - \mu}{\sigma}$, Z è una normale standard e svolgendo i calcoli a destra risulta:

$$P(W > 6200.5) = P(Z > 2.623)$$

Dunque

$$P(W > 6200.5) = 1 - \phi(2.623) = 0.0044 = 0.44\%$$

Esercizio 3

(a) Vi sono in totale $n = 2500$ lampadine e ciascuna ha una probabilità $p = \frac{1}{1000}$ di fulminarsi. Denotiamo con X il numero totale di lampadine fulminate nella notte. X ha una distribuzione Binomiale di parametri $n = 2500$ e $p = \frac{1}{1000}$ dunque

$$P(X = 0) = \binom{n}{0} (1-p)^n p^0 = (0.999)^{2500} \simeq 0.082$$

Una altra possibile risoluzione del quesito (a). La probabilità di una lampadina di non fulminarsi è $1-p = 0.999$ dunque per l'indipendenza la probabilità per 2500 lampadine di non fulminarsi durante la notte è:

$$\overbrace{0.999 \cdot 0.999 \cdot \dots \cdot 0.999}^{2500 \text{ volte}} = 0.999^{2500} \simeq 0.082$$

(b) Tutte le lampadine hanno uguale probabilità di fulminarsi, nel centro storico vi sono 1000 lampadine su un totale di 2500. Possiamo calcolare la probabilità cercata come rapporto tra casi FAVOREVOLI e casi POSSIBILI.

$$P(\text{La lampadina fulminata è nel centro storico}) = \frac{1000}{2500} = 0.4 = 40\%$$

(c) Indichiamo con Y il numero di lampadine fulminate in un anno. Sia $X_{i,j}$ con $i \in \{1, 2, \dots, 2500\}$ e $j \in \{1, 2, \dots, 365\}$ una variabile bernoulliana con:

$$X_{i,j} =$$

$$X_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{Se la } i\text{-esima lampadina il giorno } j\text{-esimo si è fulminata} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora $Y = \sum_{i,j} X_{i,j}$, Y è somma di $2500 \cdot 365$ variabili bernoulliane di parametro $p = \frac{1}{1000}$. Dunque Y è una variabile aleatoria binomiale di parametri $p = \frac{1}{1000}$ e $N = 2500 \cdot 365 = 912500$.

$$\mathbb{E}[Y] = Np = 912.5$$

$$\text{VAR}[Y] = Np(1-p) \simeq 911.59$$

(d) Approssiamo Y con una variabile aleatoria normale W con media e varianza uguali a media e varianza di Y .

$$W \sim \mathcal{N}(912.5, 911.6)$$

applicando la correzione di continuità si ha

$$P(Y \leq 950) \simeq P(W < 950.5) = P\left(\frac{W - 912.5}{30.19} < \frac{950.5 - 912.5}{30.19}\right)$$

Sia $Z = \frac{W-912.5}{30.19}$ dunque $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

$$P(W < 950.5) = P(Z < 1.26) = \Phi(1.26) = 0.89617$$

Esercizio 4

(a) Sia $n = 70$ il numero degli studenti e sia $p = 0.01$ la probabilità che uno studente vada a ricevimento un certo giorno. Fissato un giorno di ricevimento, sia X la variabile aleatoria che indica il numero totale di studenti presenti al ricevimento. Siano Y_1, \dots, Y_{70} le variabili aleatorie a valori in $\{0, 1\}$ così definite:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{Se l}'i\text{-esimo studente è andato a ricevimento} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

allora Y_i sono 70 v.a. indipendenti Bernoulliane di parametro $p = 0.01$ e $X = \sum_{i=1}^{70} Y_i$ ha distribuzione binomiale $X \sim Bin(n = 70, p = 0.01)$ e la sua media è data da $\mathbb{E}[X] = np = 0.7$.

(b) La probabilità cercata è

$$P(X = 0) = \binom{70}{0} \cdot p \cdot (1 - p)^{70} = (0.99)^{70} \simeq 0.4948$$

Se avessimo deciso di stimare $P(X = 0)$ approssimando la X con una v.a. Y di Poisson avremmo avuto $Y \sim Poisson(0.7)$ e

$$P(Y = 0) = e^{-0.7} \cdot \frac{0.7^0}{0!} \simeq 0.4965.$$

(c) La probabilità che ad un fissato ricevimento non si presenti nessuno è $p_2 = 0.4948$ (calcolata nel punto (b)). Poiché vi sono in tutto 50 ricevimenti allora la v.a. T ha distribuzione binomiale $T \sim Bin(50, 0.4948)$.

$$\mathbb{E}[T] = 50 \cdot p_2 \simeq 24.74$$

$$Var[T] = 50 \cdot p_2 \cdot (1 - p_2) \simeq 12.50$$

(d) Sia $\mu = E[T]$ e sia $\sigma^2 = Var[T]$. Sia W una variabile aleatoria normale di media μ e varianza σ^2 . Utilizzando la correzione di continuità possiamo stimare la probabilità cercata $P(T \geq 30)$ con $P(W > 29.5)$.

$$\begin{aligned} P(W > 29.5) &= 1 - P(W < 29.5) = 1 - P\left(\frac{W - \mu}{\sigma} < \frac{29.5 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= 1 - \phi\left(\frac{29.5 - \mu}{\sigma}\right) \simeq 1 - \phi(1.35) \simeq 0.09 \end{aligned}$$

Esercizio 5

(a) Indichiamo con X il numero di bibete vendute, X è una variabile di Poisson di parametro 0.5 dunque ha distribuzione:

$$P(X = k) = \frac{0.5^k}{k!} e^{-0.5} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Dunque per $k = 1$ si ha:

$$P(X = 1) = \frac{0.5}{1} e^{-0.5} \simeq 0.303$$

(b) Siano X_1, X_2, \dots, X_6 le variabili aleatorie che indicano le bibite vendute nei sei giorni lavorativi della settimana, sia $X_s := X_1 + X_2 + \dots + X_6$ il numero di bibite vendute in una settimana di sei giorni lavorativi. Poiché X_s è somma di variabili di Poisson indipendenti allora anche X_s sarà di Poisson e la sua media sarà la somma delle medie cioè $X_s \sim Poisson(3)$. Dove $3 = 6 \cdot 0.5$.

$$\begin{aligned} P(X_s \geq 3) &= 1 - P(X_s < 3) = 1 - (P(X_s = 0) + P(X_s = 1) + P(X_s = 2)) = \\ &= 1 - \left(\frac{3^0}{0!} e^{-3} + \frac{3^1}{1!} e^{-3} + \frac{3^2}{2!} e^{-3} \right) = 1 - \frac{17}{2} e^{-3} \simeq 0.5768 = 57.68\% \end{aligned}$$

(c) Denotiamo con Y_1, Y_2, \dots, Y_{255} il numero di bibite vendute nei 255 giorni di apertura della pizzeria e sia $Y := Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{255}$ il numero di pizze vendute in un anno.

Metodo di risoluzione 1: $\mathbb{E}[Y_i] = 40$, $VAR[Y_i] = 40$ e dunque per l'indipendenza delle Y_i si ha $\mathbb{E}[Y] = 255 \cdot 40 = 10200$ e $VAR[Y] = 255 \cdot VAR[Y_i] = 10200$.

Metodo di risoluzione 2: poiché Y è somma di variabili aleatorie di Poisson indipendenti si ha $Y \sim Poisson(255 \cdot 40 = 10200)$ e dunque $\mathbb{E}[Y] = 10200$ e $VAR[Y] = 10200$.

(d) Denotiamo ancora con Y le pizze vendute in un anno di 255 giorni lavorativi e con $Z := Y \cdot 0.50$ i soldi in euro messi da parte. Il problema si riduce a stimare la probabilità che $Y > 10000$ oppure che $Z > 5000$. Dal punto (c) sappiamo che $\mathbb{E}[Y] = 10200$ e $VAR[Y] = 10200$.

Metodo 1: Per stimare $P(Y > 10000)$ possiamo approssimare Y con una variabile aleatoria gaussiana T di media $\mu = 10200$ e varianza $\sigma^2 = 10200$. Allora utilizzando la correzione di continuità si ha:

$$\begin{aligned} P(Y > 10000) &\simeq P(T > 10000.5) = 1 - P(T \leq 10000.5) = \\ &= 1 - \phi\left(\frac{10000.5 - \mu}{\sigma}\right) \simeq 1 - \phi(-1.98) = \phi(1.98) \simeq 97.6\% \end{aligned}$$

Metodo 2: Supponiamo invece di voler stimare $P(Z > 5000)$, allora prima di tutto dobbiamo calcolare speranza e varianza di Z . Poiché $Z = Y \cdot 0.5$ si ha $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[Y] \cdot 0.5 = 5100$ e

$$VAR[Z] = VAR[Y] \cdot (0.5)^2 = 2550.$$

(La variabile aleatoria Z non è di Poisson!). La variabile aleatoria Z non è a valori interi quindi non è possibile applicare la correzione di continuità. Senza usare la correzione di continuità si ottiene il seguente risultato:

$$\begin{aligned} P(Z > 5000) &\simeq P(S > 5000) = 1 - P(S \leq 5000) = \\ &= 1 - \phi\left(\frac{5000 - 5100}{\sqrt{2550}}\right) \simeq 1 - \phi(-1.98) = \phi(1.98) \simeq 97.6\% \end{aligned}$$

Esercizio 6

- (a) 3.9
- (b) 2%
- (c) circa $2 \cdot 10^{-6}$ ovvero $\frac{1}{500000}$
- (d) 15500, 15452
- (e) 0.0016

Esercizio 7

- (a) 2400, 2368.76
- (b) $\frac{5}{6}$
- (c) $1 - \phi(2.06) = 0.0197$
- (d) 24000, 23687.6, $1 - \phi(6.5) \simeq 0$

Esercizio 8

- (a) 0.22%
- (b) $\frac{13}{22}$
- (c) 132, 131.7
- (d) $1 - \phi(1.61) = 0.0537$

Esercizio 9

- (a) 145, 108.75
- (b) $\phi(3.31) - \phi(-2.35) = 0.99014$
- (c) $\binom{580}{152} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{152} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{428}$, $\phi(0.72) - \phi(0.62) = 0.03187$
- (d) $\phi(-9.18) - \phi(-14.08) \simeq 0$

Esercizio 10

- (a) 1, $\frac{19}{20}$, $\text{Bin}(20, \frac{1}{20})$
- (b) $3.5 \frac{269}{80}$, 70, $\frac{269}{4}$
- (c) $1 - \phi(1.28) = 0.10027$
- (d) $\frac{19}{45}$