Esercitazione del 12/02/2013
Istituzioni di Calcolo delle Probabilità

David Barbato

Distribuzione di una funzione di una variabile aleatoria discreta.
Sia X una variabile aletoria discreta, sia f una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, se $Y := f(X)$ allora Y è una variabile aleatoria discreta e la sua densità è data da:

$$P(Y = y) = \sum_{x|f(x)=y} P(X = x) \qquad \forall\ y \tag{1}$$

Esercizio 1. *Sia X una variabile aleatoria uniformemente distribuita sull'insieme $\{-2, -1, 0,$
$+1, +2\}$ (cioè $P(X = -2) = P(X = -1) = P(X = 0) = P(X = 1) = P(X = 2) = \frac{1}{5}$) e sia f la funzione definita da $f(x) = x^2$ per ogni x in $\mathbb{R}$. Calcolare la distribuzione di $Y := f(X)$.*

Soluzione: $P(Y = 0) = \frac{1}{5}$, $P(Y = 1) = P(Y = 4) = \frac{2}{5}$

Talvolta la funzione f è definita solo su un sottinsieme di $\mathbb{R}$, se tale supporto include il supporto della variabile aleatoria X allora ha comunque senso definire $Y := f(X)$ (a patto di escludere al più un insieme di misura nulla) ed è possibile usare l'uguaglianza (1) per calcolare la distribuzione di X.

Esercizio 2. *Sia X una variabile aleatoria geometrica di parametro $\frac{1}{2}$ e sia f la funzione definita da $f(n) = (-1)^n$ per ogni n in $\mathbb{N}$. Calcolare la distribuzione di $Y := f(X)$.*

Soluzione: $P(Y = -1) = \frac{2}{3}$, $P(Y = 1) = \frac{1}{3}$

Funzione di ripartizione
Sia F_X una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. consideriamo le seguenti condizioni:

$$(*) \begin{cases} F_X \ \text{ è non decrescente} \\ \lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1 \\ \lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0 \\ F_X \ \text{ è continua a destra} \end{cases}$$

La funzione F_X è una funzione di ripartizione di una variabile aleatoria se e solo se soddisfa le condizioni $(*)$. Se F_X è una funzione definita a tratti tale che all'interno di ciascun intervello di definizione è non decrescente e continua a destra allora affinché sia non decrescente e continua a destra su tutto $\mathbb{R}$ sarà sufficiente verificare che per ogni x_0 estremo degli intervalli di definizione valga la relazione:

$$\lim_{x \to x_0^-} F_X(x) \leq F_X(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} F_X(x)\,.$$

Esercizio 3. *Per quali valori di* α *la funzione* F_X *è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria.*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{1}{2} + \alpha x & -1 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Soluzione: $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$

Esercizio 4. *Per quali valori di* α *la funzione* F_X *è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria.*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{\pi}(x + \alpha \sin(x)) & -0 \leq x < \pi \\ 1 & x \geq \pi \end{cases}$$

`Sugg: Poiché la funzione` F_X `è derivabile in` $(0, \pi)$ `allora si può studiare la monotonia in` $(0, \pi)$ `attraverso lo studio del segno della sua derivata prima.`

Soluzione: $\alpha \in [-1, +1]$

Variabili aleatorie assolutamente continue.
Una variabile aleatoria X è assolutamente continua se esiste una funzione f_X da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ non negativa tale che per ogni intervallo (a, b) si abbia:

$$P(X \in (a, b)) = \int_a^b f_X(x)dx \qquad (2)$$

la funzione f_X è detta la densità della v.a. X. Dalla (2) risulta $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)dx$ e anche $P(X = a) = 0$, per ogni a e b con

$a < b$. Inoltre se $A \subseteq \mathbb{R}$, $A = \cup_{i \in \mathbb{N}}(a_i, b_i)$ con $(a_i, b_i) \cap (a_j, b_j) = \emptyset$ per ogni $i \neq j$ allora

$$P(X \in A) = \sum_i \int_{a_i}^{b_i} f_X(x)dx$$

Infine valgono le seguenti ugualglianze:

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx \quad \forall a \qquad \text{e} \qquad f_X(a) = \frac{d}{da}F_X(a) \quad \text{per quasi ogni}^1 \ a$$

Valore atteso di variabili aleatorie assolutamente continue.
Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua e sia f_X la sua densità.

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx \qquad \text{se} \qquad \int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x)dx < \infty$$

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x)dx \qquad \text{se} \qquad \int_{\mathbb{R}} |g(x)| f_X(x)dx < \infty$$

Cosa succede se la condizione $\int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x)dx < \infty$ oppure la condizione $\int_{\mathbb{R}} |g(x)| f_X(x)dx < \infty$ non è verificata? Vediamo il seguente esercizio.

Esercizio 5. *Sia X una v.a. uniforme sull'intervallo $(0, 2)$, sia g la funzione definita da*

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Calcolare $\mathbb{E}[g(X)]$.

Soluzione: $\quad \mathbb{E}[g(X)] = -\infty$

Variabili aleatorie normali.
Proposizione 1. Se X è una v.a. normale, con distribuzione $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ allora anche $Y := aX + b$ è normale e vale $Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.
Proposizione 2. Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono v.a. normaliindipendenti con distribuzione $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ allora anche $Y := a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots, a_nX_n$ sarà normale e vale $Y \sim N(a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \ldots, a_n\mu_n, a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \ldots + a_n^2\sigma_n^2)$.

[1] L'uguaglianza è vera a meno di un insieme di misura di Lebesque nulla, in particolare se la funzione F è C^1 a tratti allora l'uguaglinza sarà vera ovunque all'interno di tutti i tratti della F_X in cui è C^1

Una variabile aleatoria Z normale con distribuzione $Z \sim N(0,1)$ è detta *normale standard*, la sua funzione di ripartizione è indicata generalmente con la lettera Φ e si ha:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{dt}$$

Vale $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ e se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ allora si ha

$$P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Approssimazione Normale. Le ragioni del *perché* molte distribuzioni siano approssivamente normali verranno illustrate quando verrà studiato il teorema del limite centrale. In questa lezione vedremo il *come* si applica il procedimento di approssiamzione Normale (`Gaussiana`). L'ambito di applicazione maggiore è dato dall'approssimazione di v.a. $X \sim Bin(n,p)$ binomiali con il parametro n grande, nel caso della binomiale l'approsimazione sarà tanto migliore quanto maggiore è la varianza di X, $\mathrm{VAR}(X) = np(1-p)$ nella maggior parte delle applicazioni una varianza maggiore di 10 sarà considerata sufficiente per poter procedere con l'approssiamzione normale.
Procedimento di Approssimazione Normale. Sia X la variabile che vogliamo approssimare (`non necessariamente binomiale`). Siano $\mu = \mathbb{E}[X]$ e $\sigma^2 = VAR[X]$. Allora la distribuzione di X verrà approssimata da quella di una v.a. Y normale con la stessa media e la stessa varianza di X: $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.
Correzione di continuità. La correzione di continuità permette di avere stime più precise e si applica quando la variabile da approssimare X è una v.a. binomiale (`vedere esempio 4f del libro di testo pag 219`). La correzione di continuità è cruciale per avere una buona approssimazione quando la varianza non è molto grande. Illustriamo il procedimento con un esempio. Sia $X \sim Bin(n,p)$, $\mu = np$ e $\sigma^2 = np(1-p)$. Le seguenti probabilità sono uguali

$$P(X \leq 60) = P(X \leq 60.5) = P(X < 61) \tag{3}$$

mentre per $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ si ha

$$P(Y \leq 60) \neq P(Y \leq 60.5) \neq P(Y < 61)$$

La approssimazione migliore per la probabilità (3) è data da:

$$P(X \leq 60) = P(X \leq 60.5) = P(X < 61) \simeq P(Y \leq 60.5) = \Phi\left(\frac{60.5-\mu}{\sigma}\right)$$

Esercizio 6. *Una macchina per il confezionamento del latte riempe i cartoni con una quantità di latte casuale, rappresentata da una v.a.* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. *Il valore di riempimento ideale sarebbe* 1000 *ml, ma vi è una certa tolleranza: una confezione è considerata accettabile se contiene tra* 975 *e* 1025 *ml di latte, e difettosa altrimenti.*
(a) Se $\mu = 1000$ *e* $\sigma = 10$. *Qualè la probabilità che una confezione sia difettosa.*
(b) Supponiamo ancora che $\mu = 1000$, *per quali valori di* σ *la probabilità che una confezione sia difettosa è minore del* 5%*?*

Esercizio 7. `Calcolo delle Probabilità 18/11/2010`

Sia X *una variabile aleatoria normale con distribuzion e* $X \sim N(0, 9)$. *Sia* $Y = max\{X, 0\}$.
(a) Dimostrare che Y *ha funzione di ripartizione:*

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \phi\left(\frac{t}{3}\right) & t \geq 0 \end{cases}$$

(b) Calcolare la derivata: $\frac{d}{dt}F_Y(t)$ *per* $t > 0$.
(c) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$. *(Solo in Aula.* Y *è una v.a. mista!)*

Esercizio 8. *Siano* X_1, X_2 *e* X_3 *tre variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo inoltre che* X_1 *abbia una distribuzione binomiale* $\mathcal{B}(n, p)$ *di parametri* $p = \frac{1}{2}$ *e* $n = 2$ *che* X_2 *abbia una distribuzione normale* $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *di parametri* $\mu = 1$ *e* $\sigma = 1$ *e che* X_3 *abbia invece una distribuzione di Poisson* $\mathcal{P}(\lambda)$ *di parametro* $\lambda = 1$. *Siano infine* $T = X_1 + X_2 + X_3$, $Z = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$ *e* $W = \max(X_1, X_2, X_3)$.
(a) Calcolare il valore atteso e varianza di T.
(b) Calcolare il valore atteso e varianza di Z *(utilizzare la formula* $VAR(Z) = \mathbb{E}[Z^2] - (\mathbb{E}[Z])^2$*).*
(c) Calcolare $P(W < \frac{1}{2})$.
(d) Calcolare $\mathbb{E}[(X_1 + X_2) \cdot (X_2 + X_3)]$.

Esercizio 9. *Siano* X_1, X_2 *e* X_3 *tre variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo inoltre che* X_1 *abbia una distribuzione bernoulliana di parametro* $p = \frac{1}{3}$ *che* X_2 *abbia una distribuzione binomiale* $\mathcal{B}(n, p)$ *di parametri* $p = \frac{1}{2}$ *e* $n = 3$ *che* X_3 *abbia una distribuzione normale* $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *di parametri* $\mu = 1$ *e* $\sigma = 2$. *Siano infine* $T = X_1 + 2X_2 + 3X_3$, $Z = \max(X_1, X_2, X_3)$.
(a) Calcolare il valore atteso e la varianza di T.
(b) Calcolare $P(X_3 < X_1)$.
(c) Calcolare $P(Z > \frac{1}{2})$.
(d) Calcolare $\mathbb{E}[\frac{1}{1+X_2}]$.

Esercizio 10. *Siano X_1, X_2 e X_3 tre variabili aleatorie indipendenti.*
Sia X_1 v.a. con distribuzione bernoulliana di parametro $p = \frac{1}{4}$.
Sia X_2 v.a. con distribuzione normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ di parametri $\mu = 5$ e $\sigma = 3$.
Sia X_3 una variabile aleatoria discreta a valori in $\{4, 7\}$ con $P(X_3 = 4) = \frac{1}{3}$ e $P(X_3 = 7) = \frac{2}{3}$.
Siano infine $T = 2 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$ e $Z = \max(X_1, X_2, X_3)$.
(a) Calcolare media, varianza e momento del secondo ordine di X_3.
(b) Calcolare media e varianza di T.
(c) Calcolare $P(Z > 6)$.
(d) Calcolare $\mathbb{E}[(X_1 - X_2) \cdot (X_1 + X_2)]$.

Esercizio 11. *Sia X_1, X_2 e X_3 tre variabili aleatorie indipendenti. Sia X_1 v.a. con distribuzione uniforme su $(0, 4)$. Sia X_2 v.a. normale di media $\mu = 3$ e varianza $\sigma^2 = 4$. Sia X_3 v.a. con distribuzione bernoulliana di parametro $p = \frac{1}{2}$. Siano infine $Z = X_1 + X_2 + 7 \cdot X_3$ e $W = max(X_1, X_3)$.*
(a) Calcolare media e varianza di Z.
(b) Calcolare $\mathbb{E}[X_1]$, $\mathbb{E}[X_2^2]$. $\mathbb{E}[X_3^3]$.
(c) Calcolare $\mathbb{E}[X_3 \cdot (X_3 + 1) \cdot (X_3 + X_2)]$.
(d) Calcolare $P(X_3 > X_1)$.
(e) Calcolare F_W.

Esercizio 12. *Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti e sia $Z := \min\{X, Y\}$. Supponiamo inoltre che X sia discreta con $P(X = 1) = \frac{1}{2}$, $P(X = 2) = \frac{1}{3}$ e $P(X = 3) = \frac{1}{6}$ mentre Y sia una variabile aleatoria continua con densità f_Y:*

$$f_Y(y) := \begin{cases} \frac{2\cos(y) + 5\sin(y)}{7} & y \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & y \notin (0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

(a) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.

(b) Calcolare $\mathbb{E}[X^2]$.

(c) Calcolare $VAR[X]$.

(d) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.

(e) Calcolare $\mathbb{E}[Y^2]$.

(f) Calcolare $VAR[Y]$.

(g) Calcolare F_X. Scrivere tutti i passaggi.
(h) Calcolare F_Y. Scrivere tutti i passaggi.
(i) Calcolare $P(X < Y)$. Scrivere tutti i passaggi.
(l) Calcolare F_Z. Scrivere tutti i passaggi.

Esercizio 13. *Siano X, Y e Z tre variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che X sia Poissoniana di parametro $\lambda = 3$, Y sia Binomiale di parametri $n = 2$ e $p = \frac{1}{2}$, mentre Z ha distribuzione normale di media $\mu = 0$ e varianza $\sigma^2 = 1$.*

(a) Calcolare $\mathbb{E}[X + Y - Z]$.

(b) Calcolare $\mathbb{E}[XYZ]$.

(c) Calcolare $\mathbb{E}[X^2 + Y^2 + Z^2]$.

(d) Calcolare $\mathbb{E}[(X + Y)^2]$.

(e) Calcolare $P(X + Y = 0)$.

(f) Calcolare $P(X \cdot Y = 0)$.

(g) Calcolare $P(Y \cdot Z = 0)$.

(h) Calcolare $P(Y \cdot Z > 0)$.

(i) Calcolare $\mathbb{E}[Y^6]$. Scrivere tutti i passaggi.
(l) Calcolare $P[X = Y]$. Scrivere tutti i passaggi.
(m) Calcolare $P(Z > Y)$. Scrivere tutti i passaggi. (Utilizzare $\phi(0) = 0.5$, $\phi(1) = 0.84134$ e $\phi(2) = 0.97725$)

Soluzioni

Esercizio 8

$$\mathbb{E}[X_1] = np = 1 \qquad \mathrm{VAR}(X_1) = np(1-p) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{E}[X_1^2] = np(1-p) + n^2p^2 = \frac{3}{2}$$

$$\mathbb{E}[X_2] = \mu = 1 \qquad \mathrm{VAR}(X_2) = \sigma^2 = 1 \qquad \mathbb{E}[X_2^2] = \sigma^2 + \mu^2 = 2$$

$$\mathbb{E}[X_3] = \lambda = 1 \qquad \mathrm{VAR}(X_3) = \lambda = 1 \qquad \mathbb{E}[X_3^2] = \lambda + \lambda^2 = 2$$

Dove $\mathbb{E}[X_i^2]$ può essere ottenuto anche come $\mathbb{E}[X_i^2] = (\mathbb{E}[X_i])^2 + \text{VAR}(X_i)$.
(a)

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + X_3] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \mathbb{E}[X_3] = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\begin{aligned}\text{VAR}(T) &= \text{VAR}(X_1 + X_2 + X_3) = \text{VAR}(X_1) + \text{VAR}(X_2) + \text{VAR}(X_3) = \\ &= \tfrac{1}{2} + 1 + 1 = \tfrac{5}{2} = 2.5\end{aligned}$$

(b)

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X_1 \cdot X_2 \cdot X_3] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[X_2] \cdot \mathbb{E}[X_3] = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\mathbb{E}[Z^2] = \mathbb{E}[X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2] = \mathbb{E}[X_1^2] \cdot \mathbb{E}[X_2^2] \cdot \mathbb{E}[X_3^2] = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 6$$

$$\text{VAR}(Z) = \mathbb{E}[Z^2] - (\mathbb{E}[Z])^2 = 6 - 1 = 5$$

(c)

$$P\left(W < \frac{1}{2}\right) = P\left(\max(X_1, X_2, X_3) < \frac{1}{2}\right) = P\left(X_1 < \frac{1}{2},\ X_2 < \frac{1}{2},\ X_3 < \frac{1}{2}\right) =$$

$$= P\left(X_1 < \frac{1}{2}\right) \cdot P\left(X_2 < \frac{1}{2}\right) \cdot P\left(X_3 < \frac{1}{2}\right) = P(X_1 = 0) \cdot P\left(X_2 < \frac{1}{2}\right) \cdot P(X_3 = 0)$$

Utilizzando le definizioni di densità discreta per variabili binomiali e di Poisson si ha :

$$P(X_1 = 0) = (1-p)^n = \frac{1}{4} \qquad P(X_3 = 0) = e^{-\lambda} = e^{-1}$$

Per calcolare $P\left(X_2 < \frac{1}{2}\right)$ bisogna ricondursi ad una normale standard:

$$P\left(X_2 < \frac{1}{2}\right) = P\left(\frac{X_2 - \mu}{\sigma} < \frac{\frac{1}{2} - \mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{X_2 - \mu}{\sigma} < -\frac{1}{2}\right)$$

$$P\left(X_2 < \frac{1}{2}\right) = 1 - \phi(\frac{1}{2}) = 0.3085$$

dunque

$$P\left(W < \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot 0.3085 \cdot e^{-1} = 0.0284$$

(d) Prima di tutto osserviamo che le variabili $(X_1 + X_2)$ e $(X_2 + X_3)$ **non** sono indipendenti (perché hanno entrambe X_2 come addendo). Sviluppando il prodotto si ha:

$$\mathbb{E}[(X_1 + X_2) \cdot (X_2 + X_3)] = \mathbb{E}[X_1X_2 + X_1X_3 + X_2^2 + X_2X_3] =$$

$$= \mathbb{E}[X_1X_2] + \mathbb{E}[X_1X_3] + \mathbb{E}[X_2^2] + \mathbb{E}[X_2X_3] =$$

$$= \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[X_2] + \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[X_3] + \mathbb{E}[X_2^2] + \mathbb{E}[X_2] \cdot \mathbb{E}[X_3] =$$

$$= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 + 1 \cdot 1 = 5$$

Esercizio 9

$$\mathbb{E}[X_1] = \tfrac{1}{3} \qquad \text{VAR}(X_1) = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{2}{9}$$

$$\mathbb{E}[X_2] = 3 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2} \quad \text{VAR}(X_2) = 3 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{4}$$

$$\mathbb{E}[X_3] = \mu = 1 \qquad \text{VAR}(X_3) = \sigma^2 = 4$$

(a)

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[X_1 + 2X_2 + 3X_3] = \mathbb{E}[X_1] + 2\mathbb{E}[X_2] + 3\mathbb{E}[X_3] =$$

$$= \frac{1}{3} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 1 = \frac{1}{3} + 3 + 3 = \frac{19}{3}$$

$$\text{VAR}(T) = \text{VAR}(X_1 + 2X_2 + 3X_3) = \text{VAR}(X_1) + 4 \cdot \text{VAR}(X_2) + 9 \cdot \text{VAR}(X_3) =$$

$$= \frac{2}{9} + 3 + 36 = \frac{353}{9}$$

(b)

$$P(X_3 < X_1) = P(X_3 < X_1 | X_1 = 0)P(X_1 = 0) + P(X_3 < X_1 | X_1 = 1)P(X_1 = 1) =$$

$$= P(X_3 < 0 | X_1 = 0)P(X_1 = 0) + P(X_3 < 1 | X_1 = 1)P(X_1 = 1) =$$

$$= P(X_3 < 0)\frac{2}{3} + P(X_3 < 1)\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot P\left(\frac{X_3 - 1}{2} < \frac{-1}{2}\right) + \frac{1}{3} \cdot P\left(\frac{X_3 - 1}{2} < \frac{1 - 1}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} \cdot \Phi(0) = \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{3} \cdot \Phi(0)$$

$$\frac{2}{3} \cdot (0.30854) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = 0.37236$$

(c)

$$P(Z > \frac{1}{2}) = 1 - P(Z \leq \frac{1}{2}) =$$

$$1 - P(X_1 \leq \frac{1}{2}) \cdot P(X_2 \leq \frac{1}{2}) \cdot P(X_3 \leq \frac{1}{2}) =$$

$$1 - P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 0) \cdot P\left(\frac{X_3 - 1}{2} \leq \frac{\frac{1}{2} - 1}{2}\right) =$$

$$= 1 - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Phi\left(-\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{12} \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{4}\right)\right) = 0.9666$$

(d)

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{1+X_2}\right] = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{1+k} \cdot P(X_2 = k) =$$

$$1 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} =$$

$$= \frac{12+18+12+3}{12 \cdot 8} = \frac{45}{96} = \frac{15}{32}$$

Esercizio 10

$\mathbb{E}[X_1] = p = \frac{1}{4}$ $\quad$ $\mathrm{VAR}(X_1) = p(1-p) = \frac{3}{16}$ $\quad$ $\mathbb{E}[X_1^2] = p = \frac{1}{4}$

$\mathbb{E}[X_2] = \mu = 5$ $\quad$ $\mathrm{VAR}(X_2) = \sigma^2 = 9$ $\quad$ $\mathbb{E}[X_2^2] = \sigma^2 + \mu^2 = 34$

$\mathbb{E}[X_3] = 6$ $\quad$ $\mathrm{VAR}(X_3) = 2$ $\quad$ $\mathbb{E}[X_3^2] = 38$

(a) Dove $\mathbb{E}[X_3]$, $\mathbb{E}[X_3^2]$ e $\mathrm{Var}(X_3)$ sono state ottenute tramite calcolo esplicito:

$$\mathbb{E}[X_3] = \sum_k k \cdot P(X_3 = k) = 4 \cdot \frac{1}{3} + 7 \cdot \frac{2}{3} = 6$$

$$\mathbb{E}[X_3^2] = \sum_k k^2 \cdot P(X_3 = k) = 16 \cdot \frac{1}{3} + 49 \cdot \frac{2}{3} = 38$$

$$\mathrm{Var}(X_3) = \mathbb{E}[X_3^2] - \mathbb{E}[X_3]^2 = 38 - 6^2 = 2$$

(b) Per l'indipendenza delle variabili aleatorie si ha che la speranza del prodotto è uguale al prodotto delle speranze

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[2 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3] = 2 \cdot \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[X_2] \cdot \mathbb{E}[X_3] =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 5 \cdot 6 = 15$$

$$\mathrm{Var}(T) = \mathbb{E}[T^2] - (\mathbb{E}[T])^2$$

$$\mathbb{E}[T^2] = \mathbb{E}[(2 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3)^2] = \mathbb{E}[4 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2] =$$

$$= 4 \cdot \mathbb{E}[X_1^2] \cdot \mathbb{E}[X_2^2] \cdot \mathbb{E}[X_3^2] = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 34 \cdot 38 = 1292$$

$$\mathrm{Var}(T) = 1292 - 15^2 = 1067$$

(c)

$$P(Z > 6) = P(max\{X_1, X_2, X_3\} > 6) = 1 - P(max\{X_1, X_2, X_3\} \leq 6) =$$

$$= 1 - P(X_1 \leq 6, X_2 \leq 6, X_3 \leq 6) = 1 - P(X_1 \leq 6) \cdot P(X_2 \leq 6) \cdot P(X_3 \leq 6) =$$

$$1 - 1 \cdot F_{X_2}(6) \cdot \frac{1}{3} = 1 - \frac{\phi(\frac{6-\mu}{\sigma})}{3} = 1 - \frac{\phi(\frac{1}{3})}{3} \simeq 0.79$$

(d)

$$\mathbb{E}[(X_1 - X_2) \cdot (X_1 + X_2)] = \mathbb{E}[(X_1^2 - X_2^2)] = \mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[X_2^2] = \frac{1}{4} - 34 = -33.75$$

Esercizio 11

(a) $\frac{17}{2}$, $\frac{211}{12}$

(b) 2, 13, $\frac{1}{2}$

(c) 4

(d) $\frac{1}{8}$

(e) $F_W(w) = \begin{cases} 0 & w < 0 \\ \frac{w}{8} & 0 \leq w < 1 \\ \frac{w}{4} & 1 \leq w < 4 \\ 1 & w \geq 4 \end{cases}$