Esercitazione del 19/02/2013
Istituzioni di Calcolo delle Probabilità

David Barbato

Variabili aleatorie esponenziali.
Minimo di v.a. esponenziali indipendenti.
Ricordiamo innanzitutto che due variabili aleatorie X_1 e X_2 sono indipendenti se e solo se comunque scelti A e B sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}$ si ha $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$.
Siano X e Y due variabili esponenziali $X \sim Esp(\lambda_1)$ e $Y \sim Esp(\lambda_2)$.
Proposizione Se $X \sim Esp(\lambda_1)$, $Y \sim Esp(\lambda_2)$, X e Y sono indipendenti e $Z := min\{X, Y\}$ allora anche Z è una variabile aleatoria esponenziale e vale $Z \sim Esp(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Esercizio 1. *Sia X una v.a. aleatoria assolutamente continua con densità f_X data da*

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ cxe^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Determinare la costante c.
(b) Determinare la funzione di ripartizione F_X.
(c) Determinare la funzione di rischio di F_X.
(d) A quale distribuzione (tra quelle viste a lezione) appartiene la distribuzione di X? Indicare i parametri della distribuzione.
(e) Calcolare $\mathbb{E}[X]$ e $Var[X]$. (Utilizzare il risultato del quesito (d).)

Esercizio 2. *Sia X una v.a. aleatoria assolutamente continua con densità f_X data da*

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\alpha - x}{2} & 0 \leq x < \alpha \\ 0 & \alpha \leq x \end{cases}$$

con $\alpha > 0$.
(a) Determinare α.
(b) Determinare la funzione di ripartizione F_X.
(c) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.
(d) Determinare la funzione di rischio di F_X.
(e+) Sia Y una v.a. uniforme sull'intervallo $(0, 1)$, trovare una funzione g da $(0, 1)$ in $\mathbb{R}$ non decrescente tale che posto $Z = g(Y)$ si abbia $Z \sim X$.

(f) Calcolare $\mathbb{E}[g(Y)]$*, utilizzando la formula per il calcolo di una funzione di variabile aleatoria assolutamente continua. (Verificare che* $\mathbb{E}[g(Y)] = \mathbb{E}[X]$*)*

Esercizio 3. *Siano* X *e* Y *due variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo inoltre che* X *abbia una distribuzione bernoulliana di parametro* $p = \frac{1}{2}$ *e che* Y *abbia invece una distribuzione esponenziale di parametro* $\lambda = 3$*. Sia infine* $Z = X + Y$ *e* $T = X \cdot Y$*.*
(a) Calcolare il valore atteso di Z *e di* T*.*
(b) Calcolare la funzione di ripartizione di Z*.*
(c) Calcolare la funzione di ripartizione di T*.*
(d) Calcolare $P(Z > 2T)$*.*

Esercizio 4. *Sia* $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $p = \frac{1}{2}$ *e* $\lambda = \frac{1}{2}$*. Siano* X_1*,* X_2 *e* X_3 *tre variabili aleotorie indipendenti. Sia* X_1 *v.a. con distribuzione binomiale di parametri* $(3, p)$*. Sia* X_2 *v.a. con* $P(X_2 = x_1) = p$ *e* $P(X_2 = x_2) = 1 - p$*. Sia* X_3 *v.a. con distribuzione esponenziale di parametro* λ*. Siano infine* $T = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$ *e* $Z = X_2 + X_3$*.*
(a) Calcolare media e varianza di T*.*
(b) Calcolare $\mathbb{E}[e^{X_1+X_2}]$*.*
(c) Calcolare $P(Z \leq 1)$*,* $P(Z \leq 3)$ *e* $P(Z \leq 5)$*.*
(d) Calcolare F_Z*.*

Esercizio 5. *Siano* X_1*,* X_2 *e* X_3 *tre variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo inoltre che* X_1 *abbia una distribuzione bernoulliana di parametro* $p = \frac{1}{4}$ *che* X_2 *abbia una distribuzione esponenziale di parametro* $\lambda_1 = 2$ *e che* X_3 *abbia una distribuzione di Poisson di parametro* $\lambda_2 = 3$*. Siano infine* $T = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$*,* $Z = X_1 + X_2 + X_3$ *e* $W = \min\{X_1, X_2\}$*.*
(a) Calcolare il valore atteso e la varianza di T*.*
(b) Calcolare $P(Z < \frac{1}{2})$*.*
(c) Calcolare la funzione di ripartizione di W*.*
(d) Calcolare $\mathbb{E}[e^{X_2}]$*.*

Esercizio 6. *Siano* X*,* Y *e* Z *tre variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che* X *sia esponenziale di parametro* $\lambda = 2$*,* Y *sia uniforme sull'intervallo* $(0, 10)$*, mentre* Z *ha distribuzione discreta con* $P(Z = -1) = \frac{1}{4}$*,* $P(Z = 0) = \frac{1}{2}$ *e* $P(Z = +1) = \frac{1}{4}$*.*
(a) Calcolare $\mathbb{E}[X + Y + Z]$*.*
(b) Calcolare $\mathbb{E}[XYZ]$*.*
(c) Calcolare $\mathbb{E}[Z^2]$*.*
(d) Calcolare $VAR[Z]$*.*
(e) Calcolare $\mathbb{E}[(X + Z)^2]$*.*
(f) Calcolare $\mathbb{E}[e^Z]$*.*
(g) Calcolare $\mathbb{E}[e^{X+Z}]$*.*

(h) Calcolare $P(Y < Z)$.
(i) Calcolare $\mathbb{E}[\cos(\pi Z)]$.
(l) Calcolare $P(YZ > 2)$.

Esercizio 7. *Sia* X *una v.a. uniforme sull'intervallo* $(0,2)$ *e sia* $Y := X^2$. *Qual è la distribuzione di* Y*?*
(a) Qual é il supporto di Y*?*
(b) Calcolare la funzione di ripartizione F_Y.
(c) Calcolare la densità f_Y.

Esercizio 8. *Sia* X *una v.a. continua con densità assegnata* f_X *e sia* $Y = -\log(X)$. *Qual è la distribuzione di* Y*?*

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (0,1) \\ c\log(x) & x \in (0,1) \end{cases}$$

(a) Quanto vale la costante c*?*
(b) Calcolare la funzione di ripartizione F_X.
(c) Calcolare la funzione di ripartizione F_Y.
(d) Calcolare la densità f_Y.
(e) A quale tipo di distribuzione appartiene la distribuzione di Y. *Indicarne gli eventuali parametri.*

Esercizio 9. *Siano* $X_1, X_2, \dots, X_n$ *v.a. indipendenti con distribuzione uniforme sull'intervallo* $(0,1)$. *Sia* $W := min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, $T := max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ *e* $Y := 1 - T$. *Qual è il valore medio di* W*? E quello di* T*?*
(a) Calcolare la funzione di ripartizione F_W.
(b) Calcolare la densità f_W.
(c) Calcolare la funzione di ripartizione F_T.
(d) Calcolare la densità f_T.
(e) Calcolare il valore atteso $\mathbb{E}[T]$.
(f) Calcolare la funzione di ripartizione F_Y.
(g) Quanto vale $\mathbb{E}[W]$*?*

Soluzioni

Esercizio 1
(a) $c = 1$
(b)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-x} - xe^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

(c) $h(t) = \frac{t}{1+t}$ per ogni $t \geq 0$

(d) $X \sim Gamma(\alpha = 2, \lambda = 1)$
(e) $\mathbb{E}[X] = 2$, $VAR[X] = 2$.

Esercizio 2
(a) $\alpha = 2$
(b)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x - \frac{x^2}{4} & 0 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

(c) $\mathbb{E}[x] = \frac{2}{3}$
(d) $h(t) = \frac{2}{2-t}$ per ogni $t \in (0, 2)$
(e) $g(y) = 2 - \sqrt{4 - 4y}$ per ogni $y \in (0, 1)$

Esercizio 3
(a) $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = p + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$
$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = p \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
Dove la seconda uguaglianza segue dall'indipendenza di X e Y.
(b)

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(Z \leq z, X = 0) + P(Z \leq z, X = 1) \\ &= P(X + Y \leq z, X = 0) + P(X + Y \leq z, X = 1) \\ &= P(Y \leq z, X = 0) + P(1 + Y \leq z, X = 1) \\ &= P(Y \leq z, X = 0) + P(Y \leq z - 1, X = 1) \\ &= P(Y \leq z) \cdot P(X = 0) + P(Y \leq z - 1) \cdot P(X = 1) \\ &= F_Y(z) \cdot 0.5 + F_Y(z - 1) \cdot 0.5 \end{aligned}$$

Sapendo che Y è esponenziale di parametro 3, si ha

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 - e^{-3y} & y > 0 \end{cases}$$

e dunque considerando i tre casi, $z < 0$, $0 \leq z < 1$ e $z \geq 1$.

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 0.5 \cdot (1 - e^{-3z}) & 0 \leq z < 1 \\ 0.5 \cdot (1 - e^{-3z}) + 0.5 \cdot (1 - e^{-3(z-1)}) & z \geq 1 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{aligned}
F_T(t) &= P(T \leq t) = P(T \leq t, X = 0) + P(T \leq t, X = 1) \\
&= P(X \cdot Y \leq z, X = 0) + P(X \cdot Y \leq t, X = 1) \\
&= P(0 \leq t, X = 0) + P(Y \leq t, X = 1) \\
&= P(0 \leq t) \cdot P(X = 0) + P(Y \leq t) \cdot P(X = 1) \\
&= P(t \geq 0) \cdot 0.5 + F_Y(t) \cdot 0.5
\end{aligned}$$

considerando i due casi, $t < 0$, e $t \geq 0$ si ha:

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 0.5 + 0.5 \cdot (1 - e^{-3t}) & t \geq 0 \end{cases}$$

(d)

$$\begin{aligned}
P(Z > 2T) &= P(X + Y > 2X \cdot Y) \\
&= P(X + Y > 2X \cdot Y, X = 0) + P(X + Y > 2X \cdot Y, X = 1) \\
&= P(Y > 0, X = 0) + P(1 + Y > 2Y, X = 1) \\
&= P(Y > 0) \cdot P(X = 0) + P(Y < 1) \cdot P(X = 1) \\
&= 1 \cdot 0.5 + (1 - e^{-3}) \cdot 0.5 \\
&= 1 - 0.5 \cdot e^{-3}
\end{aligned}$$

Esercizio 4

$$\begin{array}{lll}
\mathbb{E}[X_1] = np = \frac{3}{2} & \mathrm{VAR}(X_1) = np(1-p) = \frac{3}{4} & \mathbb{E}[X_1^2] = 3 \\
\mathbb{E}[X_2] = 3 & \mathrm{VAR}(X_2) = 1 & \mathbb{E}[X_2^2] = 10 \\
\mathbb{E}[X_3] = \frac{1}{\lambda} = 2 & \mathrm{VAR}(X_3) = \frac{1}{\lambda^2} = 4 & \mathbb{E}[X_3^2] = 8
\end{array}$$

Dove $\mathbb{E}[X_2] = 2 \cdot P(X = 2) + 4 \cdot P(X = 4) = 3$.
$\mathbb{E}[X_2^2] = 2^2 \cdot P(X = 2) + 4^2 \cdot P(X = 4) = 10$
$\mathrm{VAR}(X_2) = \mathbb{E}[X_2^2] - (\mathbb{E}[X_i])^2 = 1$
Mentre per X_1 e X_2 si può utilizzare la formula $\mathbb{E}[X_i^2] = (\mathbb{E}[X_i])^2 + \mathrm{VAR}(X_i)$.
(a)

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[X_1 \cdot X_2 \cdot X_3] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[X_2] \cdot \mathbb{E}[X_3] = \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 9$$

$$\mathbb{E}[T^2] = \mathbb{E}[X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2] = \mathbb{E}[X_1^2] \cdot \mathbb{E}[X_2^2] \cdot \mathbb{E}[X_3^2] = 3 \cdot 10 \cdot 8 = 240$$

$$\mathrm{VAR}(T) = \mathbb{E}[T^2] - (\mathbb{E}[T])^2 = 240 - 81 = 159$$

(b)
$$\mathbb{E}[e^{X_1+X_2}] = \mathbb{E}[e^{X_1} \cdot e^{X_2}] = \mathbb{E}[e^{X_1}] \cdot \mathbb{E}[e^{X_2}]$$
Calcoliamo separatamente $\mathbb{E}[e^{X_1}]$ $\mathbb{E}[e^{X_2}]$.
$$\mathbb{E}[e^{X_1}] = \sum_k e^k \cdot P(X_1 = k) =$$
$$= e^0 \cdot P(X_1 = 0) + e^1 \cdot P(X_1 = 1) + e^2 \cdot P(X_1 = 2) + e^3 \cdot P(X_1 = 3) =$$
$$\mathbb{E}[e^{X_1}] = \frac{1 + 3e + 3e^2 + e^3}{8}$$
$$\mathbb{E}[e^{X_2}] = \sum_k e^k \cdot P(X_2 = k) = e^2 \cdot P(X_2 = 2) + e^4 \cdot P(X_2 = 4) =$$
$$\mathbb{E}[e^{X_2}] = \frac{e^2 + e^4}{2}$$
Dunque
$$\mathbb{E}[e^{X_1+X_2}] = \frac{1 + 3e + 3e^2 + e^3}{8} \cdot \frac{e^2 + e^4}{2}$$
(c) $Z = X_2 + X_3$. Prima di tutto osserviamo che X_2 può assumere solo i valori 2 e 4 mentre X_3 è una v.a. a valori in $(0, +\infty)$ con funaione di ripartizione:
$$F_{X_3}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$
$$P(Z \leq 1) = P(X_2 + X_3 \leq 1) =$$
$$= P(X_2 = 2, X_2 + X_3 \leq 1) + P(X_2 = 4, X_2 + X_3 \leq 1) =$$
$$= P(X_2 = 2, 2 + X_3 \leq 1) + P(X_2 = 4, 4 + X_3 \leq 1) =$$
$$= P(X_2 = 2, X_3 \leq -1) + P(X_2 = 4, X_3 \leq -3) = 0$$
Si procede in maniera analoga per $P(Z \leq 3)$
$$P(Z \leq 3) = P(X_2 + X_3 \leq 3) =$$
$$= P(X_2 = 2, X_2 + X_3 \leq 3) + P(X_2 = 4, X_2 + X_3 \leq 3) =$$
$$= P(X_2 = 2, 2 + X_3 \leq 3) + P(X_2 = 4, 4 + X_3 \leq 3) =$$
$$= P(X_2 = 2, X_3 \leq 1) + P(X_2 = 4, X_3 \leq -1) =$$
$$= P(X_2 = 2) \cdot P(X_3 \leq 1) + P(X_2 = 4) \cdot P(X_3 \leq -1) =$$
$$= \frac{1}{2}(1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot 1}) + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}}}{2}$$

Calcoliamo infine $P(Z \leq 5)$

$$P(Z \leq 5) = P(X_2 + X_3 \leq 5) =$$

$$= P(X_2 = 2, X_2 + X_3 \leq 5) + P(X_2 = 4, X_2 + X_3 \leq 5) =$$
$$= P(X_2 = 2, 2 + X_3 \leq 5) + P(X_2 = 4, 4 + X_3 \leq 5) =$$
$$= P(X_2 = 2, X_3 \leq 3) + P(X_2 = 4, X_3 \leq 1) =$$
$$= P(X_2 = 2) \cdot P(X_3 \leq 3) + P(X_2 = 4) \cdot P(X_3 \leq 1) =$$
$$= \frac{1}{2}(1 - e^{-\frac{3}{2}\cdot 1}) + \frac{1}{2} \cdot (1 - e^{-\frac{1}{2}\cdot 1}) = 1 - \frac{e^{-\frac{3}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}}{2}$$

(d) Procedendo in maniera analoga a quanto fatto per il punto (c) si ottiene

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 2 \\ \frac{1 - e^{-\frac{z-2}{2}}}{2} & 2 \leq z < 4 \\ 1 - \frac{e^{-\frac{z-2}{2}} + e^{-\frac{z-4}{2}}}{2} & z \geq 4 \end{cases}$$

Esercizio 5

(a) $\frac{3}{8}$, $\frac{87}{64}$

(b) $\frac{3}{4}(e^{-3} - e^{-4}) \simeq 0.0236$

(c) $F_W(w) = \begin{cases} 0 & w < 0 \\ 1 - \frac{1}{4}(e^{-2w}) & 0 \leq w < 1 \\ 1 & w \geq 1 \end{cases}$

(d) 2

Esercizio 7

(a) $P(Y \in (0,4)) = 1$

(b)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{\sqrt{y}}{2} & 0 \leq y < 4 \\ 1 & y \geq 4 \end{cases}$$

(c)

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \notin (0,4) \\ \frac{1}{4\sqrt{y}} & y \in (0,4) \end{cases}$$

Esercizio 8
(a) $c = -1$.
(b)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x(1 - \log(x)) & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

(c)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 - e^{-y}(1 + y) & y \geq 0 \end{cases}$$

(d)

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ ye^{-y} & y > 0 \end{cases}$$

(e) $Y \sim$Gamma$(\alpha = 2, \lambda = 1)$

Esercizio 9
(a)

$$F_W(w) = \begin{cases} 0 & w < 0 \\ 1 - (1 - w)^n & 0 \leq w < 1 \\ 1 & w \geq 1 \end{cases}$$

(b)

$$f_W(w) = \begin{cases} 0 & w \notin (0, 1) \\ n(1 - w)^{n-1} & w \in (0, 1) \end{cases}$$

(c)

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^n & 0 \leq t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

(d)

$$f_t(t) = \begin{cases} 0 & t \notin (0, 1) \\ nt^{n-1} & t \in (0, 1) \end{cases}$$

(e) $\mathbb{E}[T] = \frac{n}{n+1}$
(f)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 - (1 - y)^n & 0 \leq y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$$

(g) E' facile verificare che le v.a. W e Y hanno la stessa distribuzione quindi $\mathbb{E}[W] = \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[1 - T] = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$