Esercitazione del 26/02/2013
Istituzioni di Calcolo delle Probabilità

David Barbato
barbato@math.unipd.it

Esercizio 1. *E' la notte di San Lorenzo, Alessandra decide di andare a vedere le stelle cadenti. Osserverà il cielo finché non vedrà 3 stelle cadenti. Sia X il tempo che intercorre tra l'inizio della sua osservazione e l'istante in cui vede la terza stella cadente. Qual è la distribuzione più adatta per la v.a. X? Perché? (Supporre che $\frac{1}{\lambda}$ sia il tempo medio necessario per vedere la prima stella cadente.)*

Vettori aleatori discreti.
Sia (X, Y) una vettore aletorio discreto, con densità f allora X e Y sono v.a. discrete e la loro distribuzione è data da:

$$P(Y = y) = \sum_{x|f(x,y)>0} f(x, y) \qquad \text{e} \qquad P(X = x) = \sum_{y|f(x,y)>0} f(x, y) \tag{1}$$

Esercizio 2. *Sia (X, Y) un vettore aleatorio discreto con densità f data da:*

$$f(m, n) = \left(\frac{2}{2 + 3^m}\right)^n \qquad \forall\ n, m \text{ interi e positivi}$$

(cioè $P(X = m, Y = n) = \left(\frac{2}{2+3^m}\right)^n$).
(a) Calcolare la distribuzione di X.
(b) A quale distribuzione appartiene X? (Indicare gli eventuali parametri.)

Soluzione: (a) $P(X = m) = \frac{2}{3^m}$ per ogni m intero e positivo. (b) La v.a. X è una v.a. geometrica di parametro $\frac{2}{3}$.

Vettori aleatori continui.

Esercizio 3. *Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità:*

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \alpha(e^x + e^{x+y}) & se\ -1 < x < 1, 0 < y < 2 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

(a) Calcolare α.
(b) Calcolare la funzione di ripartizione e la densità delle variabili marginali X e Y.
(c) Calcolare $\mathbb{E}[e^{-X}]$.
(d) X e Y sono indipendenti?

Esercizio 4. *Sia (X,Y) un vettore aleatorio con densità:*

$$f_{(X,Y)}(x,y)\begin{cases} \alpha(e^x+e^{-y}) & (x,y)\in D \\ 0 & (x,y)\notin D \end{cases}$$

Dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<x<1,\ -1<y<0\ \}$
(a) Calcolare α.
(b) Calcolare la funzione di ripartizione e la densità delle variabili marginali X e Y.
(c) Calcolare $\mathbb{P}(X+Y<0)$.
(d) Calcolare $\mathbb{E}[e^Y]$.

Esercizio 5. *Sia (X,Y) un vettore aleatorio con densità continua $f_{(X,Y)}$:*

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} \alpha(\frac{sen(x)}{y^2}+\frac{2cos(x)}{y^3}) & (x,y)\in D \\ 0 & (x,y)\notin D \end{cases}$$

Dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0<x<\frac{\pi}{2}, y>1\}$.
(a) Calcolare α.
(b) Calcolare le funzioni di ripartizione e le densità delle variabili marginali X e Y.
(c) X e Y sono indipendenti?
(d) Calcolare $P(X<1)$ e $P(X<1|Y<2)$.

Esercizio 6. *Sia (X,Y) un vettore aleatorio con densità:*

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} \alpha(\frac{1}{x^2y}+\frac{1}{x^3y^2}) & se\ 1<x<2, 1<y<3 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

(a) Calcolare α.
(b) Calcolare la funzione di ripartizione e la densità delle variabili marginali X e Y.
(c) Calcolare $\mathbb{E}[XY]$.
(d) Calcolare la covarianza $cov(X,Y)$.

Esercizio 7. *Sia* (X,Y) *un vettore aleatorio con densità continua* $f_{(X,Y)}$*:*

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \alpha(\frac{e^{-y}}{x^2}) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

Dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, y > 1\}$.
(a) Calcolare α.
(b) Calcolare la funzione di ripartizione e la densità delle variabili marginali X *e* Y.
(c) Calcolare $\mathbb{E}[\frac{e^Y}{Y^2X^2} + 1]$.
(d) Le variabili X *e* Y *sono indipendenti? Quanto vale la covarianza* $cov[X,Y]$*?*

Soluzioni

Esercizio 3
(a) Si può calcolare α risolvendo l'uguaglianza

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\ dxdy = 1$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\ dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2} \alpha(e^x + e^{x+y})\ dydx =$$

$$= \alpha \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2} e^x(1+e^y)\ dydx = \alpha \int_{-1}^{1} |e^x(y+e^y)\ |_{y=0}^{y=2} dx =$$

$$= \alpha \int_{-1}^{1} 2e^x + e^x e^2 - e^x e^0 dx = \alpha \int_{-1}^{1} e^x(e^2+1)dx =$$

$$= \alpha \left| e^x(e^2+1) \right|_{x=-1}^{x=1} = \alpha(e - e^{-1})(e^2+1)$$

Quindi si ha $\alpha = \frac{1}{(e-e^{-1})(e^2+1)}$.
(b) Denotiamo con f_X e f_Y le densità di X e Y e con F_X e F_Y le rispettive funzioni di ripartizione.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dy$$

Per $x \notin (-1,1)$ si ha $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dy = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\ dy = 0$
Per $x \in (-1,1)$ invece

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dy = \int_{0}^{2} \alpha \cdot e^x(1+e^y)\ dy =$$

$$= \alpha \left| e^x(y + e^y) \right|_{y=0}^{y=2} = \alpha \cdot e^x \left(2 + e^2 - 1\right) = \frac{e^x\,(e^2+1)}{(e - e^1)(e^2+1)} = \frac{e^x}{e - e^{-1}}$$

Dunque

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (-1,1) \\ \frac{e^x}{e-e^{-1}} & x \in (-1,1) \end{cases}$$

si procede in maniera analoga per f_Y,
Per $y \notin (0,2)$ si ha $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\;dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\;dx = 0$
Per $y \in (0,2)$ invece

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\;dx = \int_{-1}^{1} \alpha \cdot e^x(1+e^y)\;dx =$$

$$= \alpha \left| e^x(1 + e^y) \right|_{x=-1}^{x=1} = \alpha \cdot \left(e^1 - e^{-1}\right)(1+e^y) = \frac{(1+e^y)\,(e-e^{-1})}{(e - e^1)(e^2+1)} = \frac{1+e^y}{e^2+1}$$

Dunque

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \notin (0,2) \\ \frac{1+e^y}{e^2+1} & y \in (0,2) \end{cases}$$

Per calcolare le funzioni di ripartizioni possiamo integrare f_X e f_Y.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\;ds$$

Per $x \le -1$ si ha $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{(X)}(s)\;ds = \int_{-\infty}^{x} 0\;ds = 0$
Per $x \ge 1$ si ha $F_X(x) = P(X \le x) = 1$
Per $-1 < x < 1$ invece

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\;ds = \int_{-1}^{x} \frac{e^s}{e - e^{-1}}\;ds = \frac{e^x - e^{-1}}{e - e^{-1}}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le -1 \\ \frac{e^x - e^{-1}}{e - e^{-1}} & -1 < x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

si procede in maniera analoga per F_Y ottenendo:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ \frac{y + e^y - 1}{1+e^2} & 0 < y < 2 \\ 1 & y \ge 2 \end{cases}$$

(c)

$$\mathbb{E}[e^{-X}] = \int e^{-x} f_X(x)\;dx = \int_{-1}^{1} e^{-x} \frac{e^x}{e - e^{-1}}\;dx = \frac{2}{e - e^{-1}}$$

(d) X e Y sono indipendenti, basta verificare che $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ per ogni x e y.

Esercizio 4

(a) Si può calcolare α risolvendo l'uguaglianza

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\ dxdy = 1$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\ dydx = \iint_D \alpha(e^x + e^{-y})dydx = \alpha \cdot \int_0^1 \int_{-1}^0 e^x + e^{-y}\ dydx =$$

$$= \alpha \cdot \int_0^1 \left[ye^x - e^{-y}\right]_{y=-1}^{y=0}\ dx = \alpha \cdot \int_0^1 -e^0 + e^x + e^1\ dx =$$

$$= \alpha \cdot [x(e-1) + e^x]_0^1 = \alpha(e - 1 + e - e^0) = 2 \cdot \alpha(e-1)$$

Quindi si ha $\alpha = \frac{1}{2(e-1)}$.

(b) Denotiamo con f_X e f_Y le densità di X e Y e con F_X e F_Y le rispettive funzioni di ripartizione.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dy$$

Per $x \notin (0,1)$ si ha $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dy = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\ dy = 0$

Per $x \in (0,1)$ invece

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dy = \int_{-1}^{0} \alpha(e^x + e^- y)\ dy =$$

$$= \alpha \left| ye^x - e^- y \right|_{y=-1}^{y=0} = \alpha \left(-e^0 + e^x + e\right)$$

Dunque

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (0,1) \\ \alpha\left(e^x + e - 1\right) & x \in (0,1) \end{cases}$$

Si procede in maniera analoga per f_Y

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dx$$

Per $y \notin (-1,0)$ si ha $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\ dx = 0$

Per $y \in (-1,0)$ invece

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dx = \int_0^1 \alpha(e^x + e^{-y})\ dx =$$

$$= \alpha \left| e^x + xe^{-y} \right|_{x=0}^{x=1} = \alpha \left(-e^0 + e^{-y} + e\right)$$

Dunque

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \notin (-1,0) \\ \alpha\,(e^{-y} + e - 1) & y \in (-1,0) \end{cases}$$

Per calcolare le funzioni di ripartizioni possiamo integrare f_X e f_Y.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\ ds$$

Per $x \leq 0$ si ha $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{(X)}(s)\ ds = \int_{-\infty}^{x} 0\ ds = 0$
Per $x \geq 1$ si ha $F_X(x) = P(X \leq x) = 1$
Per $0 < x < 1$ invece

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\ ds = \int_{0}^{x} \alpha\,(e^s + e - 1)\ ds =$$

$$= \alpha\,|e^s + s(e-1)\ |_{s=0}^{s=+x} = \alpha\,(x(e-1) + e^x - 1)$$

Dunque

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \alpha\,(x(e-1) + e^x - 1) & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

si procede in maniera analogo per F_Y ottenendo:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq -1 \\ \alpha\,(y(e-1) - e^{-y} + 2e - 1) & -1 < y < 0 \\ 1 & y \geq 0 \end{cases}$$

(c) Denotiamo con C l'insieme dei punti (x,y) di D tali che $x+y<0$. Allora si ha:

$$P(X+Y<0) = \iint_C f_{(X,Y)}(x,y)\ dydx$$

Al variare di x tra 0 e 1 la disuguaglianza $x+y<0$ ci dà $y<-x$. Dunque

$$P(X+Y<0) = \alpha \cdot \int_0^1 \int_{-1}^{-x} e^x + e^{-y}\ dydx =$$

$$= \alpha \cdot \int_0^1 \left[ye^x - e^{-y}\right]_{y=-1}^{y=-x}\ dx = \alpha \cdot \int_0^1 -xe^x - e^x + e^x + e^1\ dx =$$

$$= \alpha \cdot [-xe^x + e^x + xe]_0^1 = \alpha(-e + e + e - e^0) = \alpha(e-1) = \frac{1}{2}$$

(d) Si può calcolare $\mathbb{E}[e^Y]$ risolvendo:

$$\mathbb{E}[e^Y] = \iint_{\mathbb{R}^2} e^y \cdot f_{(X,Y)}(x,y)\; dydx$$

oppure poiché e^Y dipende solo da Y risolvendo

$$\mathbb{E}[e^Y] = \int_{\mathbb{R}} e^y \cdot f_Y(y)\; dy$$

Illustriamo la risoluzione del primo integrale (il più difficile).

$$\mathbb{E}[e^Y] = \iint_D e^y \cdot \alpha(e^x + e^{-y})\; dydx = \alpha \cdot \int_0^1 \int_{-1}^0 e^{x+y} + 1\; dydx =$$

$$= \alpha \cdot \int_0^1 \left[e^{x+y} + y\right]_{y=-1}^{y=0}\; dx = \alpha \cdot \int_0^1 e^x - e^{x-1} + 1\; dx =$$

$$= \alpha \cdot \left[e^x - e^{x-1} + x\right]_0^1 = \alpha(e - e^0 + 1 - e^0 + e^{-1}) = \frac{e + e^{-1} - 1}{2(e-1)}$$

Esercizio 5

(a) Per calcolare α bisogna imporre $f_{(X,Y)} \geq 0$ e $\iint f_{(X,Y)} dxdy = 1$.
Per $(x,y) \in D$ si ha: $sen(x) > 0$, $cos(x) > 0$, $Y^2 > 0$ e $Y^3 > 0$ dunque per soddisfare la prima condizione sarà sufficiente imporre $\alpha \geq 0$. Calcoliamo ora l'integrale $\iint f_{(X,Y)} dxdy$.

$$\iint f_{(X,Y)} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{+\infty} \alpha \left(\frac{sen(x)}{y^2} + \frac{2cos(x)}{y^3}\right) dydx =$$

$$= \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{sen(x)}{(-1)y} + \frac{2cos(x)}{(-2)y^2}\right]_{y=1}^{y=+\infty} dx = \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sen(x) + cos(x))\, dx =$$

$$= \alpha \left[-cos(x) + sen(x)\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \alpha(-cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + cos(0) + sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen(0) =$$

$$= \alpha(-0 + 1 + 1 - 0) = 2\alpha$$

Dunque

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

(b) $f_X(x) = \int f_{(X,Y)}(x,y)dy$

Se $x \notin (0, \frac{\pi}{2})$ allora $f_X(x) = \int 0dy = 0$
Consideriamo il caso $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ allora:

$$f_X(x) = \int f_{(X,Y)}dy = \int_1^{+\infty} \alpha \left(\frac{sen(x)}{y^2} + \frac{2cos(x)}{y^3} \right) dy =$$

$$= \alpha \left[\frac{sen(x)}{(-1)y} + \frac{2cos(x)}{(-2)y^2} \right]_{y=1}^{y=+\infty} = \alpha \left(sen(x) + cos(x) \right) =$$

Dunque

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha(sen(x) + cos(x)) & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & x \notin (0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$f_Y(y) = \int f_{(X,Y)}(x,y)dx$
Se $y \leq 1$ allora $f_Y(y) = \int 0dx = 0$
Consideriamo il caso $y > 1$ allora:

$$f_Y(y) = \int f_{(X,Y)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha \left(\frac{sen(x)}{y^2} + \frac{2cos(x)}{y^3} \right) dx =$$

$$= \alpha \left[\frac{-cos(x)}{y^2} + \frac{2sen(x)}{y^3} \right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \alpha \left(\frac{-cos(\frac{\pi}{2})}{y^2} + \frac{2sen(\frac{\pi}{2})}{y^3} - \frac{-cos(0)}{y^2} - \frac{2sen(0)}{y^3} \right) =$$

$$= \alpha \left(\frac{1}{y^2} + \frac{2}{y^3} \right) =$$

Dunque

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ \alpha \left(\frac{1}{y^2} + \frac{2}{y^3} \right) & y > 1 \end{cases}$$

$F_X(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f_X(x)dx$
Se $a \leq 0$ allora $F_X(a) = \int_{-\infty}^a 0dx = 0$
Se $a \geq \frac{\pi}{2}$ allora $F_X(a) = P(X \leq a) = 1.$
Consideriamo il caso $a \in (0, \frac{\pi}{2})$ allora:

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(x)dx = \int_0^a \alpha(sen(x) + cos(x))dx =$$

$$= \alpha[-cos(x) + sen(x)]_0^a dx = \alpha(-cos(a) + sen(a) + cos(0) - sen(0)) =$$

$$= \alpha(1 - cos(a) + sen(a))$$

Dunque

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & a \leq 0 \\ \alpha(1 - cos(a) + sen(a)) & a \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 1 & a \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$F_Y(b) = P(Y \leq b) = \int_{-\infty}^{a} f_Y(y)dy$
Se $b \leq 1$ allora $F_Y(b) = \int_{-\infty}^{b} 0dy = 0$
Consideriamo il caso $b > 1$ allora:

$$F_Y(b) = \int_{-\infty}^{b} f_Y(y)dy = \int_{1}^{b} \alpha\left(\frac{1}{y^2} + \frac{2}{y^3}\right)dy = \alpha\left[\frac{1}{-y} + \frac{2}{(-2)y^2}\right]_1^b dy =$$

$$\alpha\left(\frac{1}{-b} + \frac{2}{(-2)b^2} - \frac{1}{-1} - \frac{2}{(-2)1^2}\right) = \alpha\left(2 - \frac{1}{b} - \frac{1}{b^2}\right) =$$

Dunque

$$F_Y(b) = \begin{cases} 0 & b \leq 1 \\ \alpha\left(2 - \frac{1}{b} - \frac{1}{b^2}\right) & b > 1 \end{cases}$$

(c) Le variabili aleatorie X e Y non sono indipendenti perché la funzione $f_X \cdot f_Y$ è diversa da $f_{(X,Y)}$.
(d) Prima di tutto $sen(1)$ e $cos(1)$ devono essere calcolati in radianti quindi:

$$sen(1) = 0.841 \qquad cos(1) = 0.54$$

Poiché la v.a. X è assolutamente continua si ha:

$$P(X < 1) = P(X \leq 1) = F_X(1) = \alpha(1 - cos(1) + sen(1)) \simeq 0.65$$

$$P(X < 1|Y < 2) = \frac{P(X < 1, Y < 2)}{P(Y < 2)}$$

$$P(Y < 2) = P(Y \leq 2) = F_Y(2) = \alpha\left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{8} = 0.625$$

$$P(X < 1, Y < 2) = \int_0^1 \int_1^2 \alpha\left(\frac{sen(x)}{y^2} + \frac{2cos(x)}{y^3}\right)dydx =$$

$$= \int_0^1 \alpha\left[\frac{sen(x)}{-y} + \frac{2cos(x)}{(-2)y^2}\right]_{y=1}^{y=2} dx =$$

$$= \int_0^1 \alpha\left(\frac{sen(x)}{-2} + \frac{2cos(x)}{(-2)2^2} - \frac{sen(x)}{-1} - \frac{2cos(x)}{(-2)1^2}\right)dx =$$

$$= \alpha\int_0^1 \left(\frac{1}{2}sen(x) + \frac{3}{4}cos(x)\right)dx = \alpha\left[-\frac{1}{2}cos(x) + \frac{3}{4}sen(x)\right]_0^1 =$$

$$= \alpha \left(-\frac{1}{2}cos(1) + \frac{3}{4}sen(1) + \frac{1}{2}cos(0) - \frac{3}{4}sen(0) \right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(2 - 2 \cdot cos(1) + 3 \cdot sen(1)\right) \simeq 0.43$$

$$P(X < 1|Y < 2) = \frac{0.43}{0.625} = 0.688$$

Esercizio 6

(a) $\alpha = \frac{4}{2\log(3)+1} \simeq 1.251$

(b)
$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (1,2) \\ \alpha\left(\frac{\log(3)}{x^2} + \frac{2}{3x^3}\right) & x \in (1,2) \end{cases}$$
$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \notin (1,3) \\ \alpha\left(\frac{1}{2y} + \frac{3}{8y^2}\right) & y \in (1,3) \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \alpha\left(\log(3) + \frac{1}{3} - \frac{\log(3)}{x} - \frac{1}{3x^2}\right) & 1 < x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ \alpha\left(\frac{3}{8} + \frac{\log(y)}{2} - \frac{3}{8y}\right) & 1 < y < 3 \\ 1 & y \geq 3 \end{cases}$$

(c) $\mathbb{E}[XY] = \alpha\left(2\log(2) + \frac{\log(3)}{2}\right) \simeq 2.4216$

(d) $\mathrm{cov}(X,Y) \simeq 0.00196$

Esercizio 7

(a) $\alpha = e$

(b) $f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & x > 1 \end{cases}$ $\quad f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ e^{1-y} & y > 1 \end{cases}$

$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & x > 1 \end{cases}$ $\quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ 1 - e^{1-y} & y > 1 \end{cases}$

(c) $1 + \frac{e}{3}$

(d) X e Y sono indipendenti. $\mathrm{cov}[X,Y] = 0$