Secondo appello di
Istituzioni di probabilità
Laurea Triennale in scienze statistiche

Matr pari

09/07/2018

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA...

Esercizio 1. 2 punti
Siano X e Y due variabilili aleatorie normali indipendenti con distribuzioni:

$$X \sim N(1,1) \qquad\qquad Y \sim N(2,3)$$

Quanto vale al probabilità $P(X > Y)$?

Svolgimento

$$P(X > Y) = P(X - Y > 0)$$

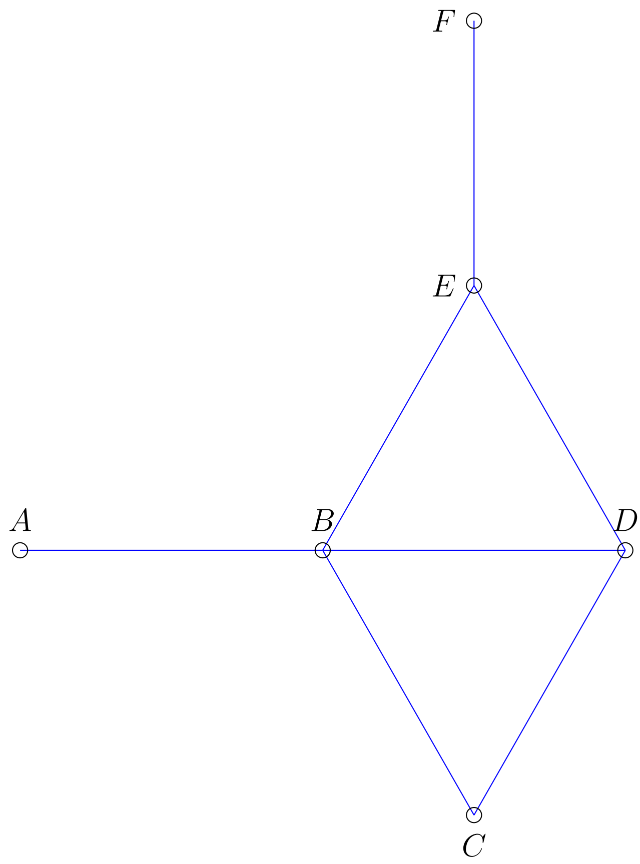
Poniamo $T := X - Y$. La variabile aleatoria T è combinazione lineare di variabili aleatorie indipendenti e normali e quindi è essa stessa una variabile aleatoria normale e vale:

$$T \sim N(-1,4)$$

$$P(X > Y) = P(T > 0) = 1 - P(T \leq 0) = 1 - \Phi\left(\frac{0-(-1)}{2}\right) = 1 - \Phi(0.5)$$

$$P(X > Y) = 0.30854$$

Esercizio 2. 10 punti
Una formica decide di espolare il labirinto mostrato in figura. All'istante zero si trova sul nodo A. Per spostarsi da un nodo ad un altro impiega un'ora. Ogni volta che raggiunge un nuovo nodo subito riparte scegliendo una direzione a caso senza però mai tornare indietro. Se raggiunge l'uscita F o torna all'ingresso A si ferma e smette di esplorare. Sia N_k la posizione della formica dopo k ore. (Cosicché per esempio $N_0 = A$, $N_1 = B$, N_2 è una variabili aleatoria uniforme sull'insieme $\{C, D, E\}$).
(a) Calcolare $P(N_2 = C)$.
(b) Calcolare $P(N_3 = C|N_2 = D)$.
(c) Calcolare $P(N_3 = C,\ N_2 = D)$.
(d) Calcolare $P(N_3 = D)$.
(e) Calcolare $P(N_2 = C|N_3 = D)$.
(f) Calcolare $P(N_3 = F)$.
(g) Calcolare $P(N_3 = F|N_2 = E)$.
(h) Calcolare $P(N_3 = F|N_2 = D)$.
(i) Calcolare $P(N_3 = F|N_2 \neq C)$.
(l) Calcolare $P(N_4 = B)$.



Soluzione
(a) $P(N_2 = C) = \frac{1}{3}$.
(b) $P(N_3 = C|N_2 = D) = \frac{1}{2}$.
(c)$P(N_3 = C,\ N_2 = D) = \frac{1}{6}$.
(d) $P(N_3 = D) = \frac{1}{2}$.
(e) $P(N_2 = C|N_3 = D) = \frac{2}{3}$.
(f) $P(N_3 = F) = \frac{1}{6}$.
(g) $P(N_3 = F|N_2 = E) = \frac{1}{2}$.
(h) $P(N_3 = F|N_2 = D) = 0$.
(i) $P(N_3 = F|N_2 \neq C) = \frac{1}{4}$.
(l) $P(N_4 = B) = \frac{1}{2}$.

Esercizio 3. 2 punti
Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua con la seguente funziona di densità:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 1 < x < e \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sia U una variabile aleatoria uniforme sull'intervallo $(0, 1)$.
(a) Calcolare la funzione di ripartizione F_X.
(b) Determinare un'applicazione g tale che posto $Y := g(U)$ si abbia $X \sim Y$.

Soluzione

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ log(x) & 1 \leq x < e \\ 1 & e \leq x \end{cases}$$

$$g(u) = e^u$$

Esercizio 4. 8 punti

Siano X, Y e Z tre variabili aleatorie indipendenti con distribuzioni:

$$X \sim Geom(p = \frac{1}{3}) \qquad Y \sim esp(\lambda = 2) \qquad Z \sim Unif(0, 2)$$

Siano inoltre assegnate le variabili:

$$W := X \cdot Y \cdot Z \qquad T = \min\{X, Z\} \qquad R = \max\{Y, Z\}$$

(a) Calcolare media e varianza della variabile aleatoria W.
(b) Calcolare $P(T = 1)$.
(c) Calcolare $P(T < 1)$.
(d) Calcolare la funzione di ripartizione F_T.
(e) Calcolare $P(R \leq 2)$.
(f) Calcolare la funzione di ripartizione F_R.
(g) Calcolare la funzione di densità f_R.
(h) Calcolare la funzione di rischio H_R.

Soluzione

(a) $\mathbb{E}[W] = \frac{3}{2}$, $Var(W) = \frac{31}{4}$
(b) $P(T = 1) = \frac{1}{6}$
(c) $P(T < 1) = \frac{1}{2}$
(d)

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \frac{t}{2} & 0 \leq t < 1 \\ \frac{1+t}{3} & 1 \leq t < 2 \\ 1 & 2 \leq t \end{cases}$$

(e) $P(R \leq 2) = 1 - e^{-4}$
(f)

$$F_R(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t}{2}(1 - e^{-2t}) & 0 \leq t < 2 \\ 1 - e^{-2t} & 2 \leq t \end{cases}$$

(g)

$$f_R(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1-e^{-2t}+2te^{-2t}}{2} & 0 \leq t < 2 \\ 2e^{-2t} & 2 \leq t \end{cases}$$

(h)

$$H_R(t) = \begin{cases} \frac{1-e^{-2t}+2te^{-2t}}{2-t+te^{-2t}} & 0 \leq t < 2 \\ 2 & 2 \leq t \end{cases}$$

Esercizio 5. 10 punti
Sia (X,Y) un vettore aleatorio assolutamente continuo. Con supporto sull'insieme D

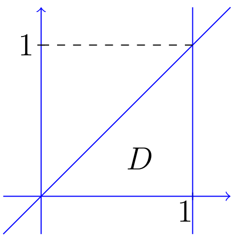
$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < y < x < 1\}$$

e funzione di densità f_X

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \alpha \ \frac{y}{x} & \text{se } (x,y) \in D \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

`Per alcuni calcoli potrebbe essere utili conoscere l'integrale:`
$\int t^n \log(t) \ \ dt = \frac{t^{n+1}}{n+1}(\log(t) - \frac{1}{n+1}) + C$

(a) Effettuarre un disegno del supporto D e calcolare α.
(b) Calcolare funzione di densità e di ripartizione della variabili aleatoria X.
(c) Calcolare funzione di densità e di ripartizione della variabili aleatoria Y.
(d) Calcolare $\mathbb{E}[X]$ e $\mathbb{E}[Y]$.
(e) Calcolare $\mathbb{E}[XY]$ e $COV(X,Y)$.



(a) Per disegnare il supporto D occorre dapprima rappresentare le 3 rette $y = 0$, $y = x$ e $x = 1$. La retta $y = x$ è la bisettrice del primo e quarto quadrante, la condizione $y < x$ vuol dire sotto la bisettrice. La retta $y = 0$ ` l'asse delle x la condizione $y > 0$ vuol dire sopra l'asse delle x. La retta $x = 1$ è la retta verticale di ascissa 1 e la condizione $x < 1$ vuol dire a sinistra di tale retta.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y) dy dx = \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{\alpha y}{x} dy \right) \ dx = \int_0^1 \frac{\alpha x}{2} \ dx = \frac{\alpha}{4}$$

Notare che al primo membro la variabile x è presente solo all'interno dell'integrale in dx e la variabile y solo all'interno dell'integrale in dy. Quando integro in dy dopo che ho integrato, la variabile y non è più presente e lo stesso vale per l'integrazione in dx.

$$\frac{\alpha}{4} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 4$$

(b)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{(X,Y)}(x,y) dy$$

se x non appartiene all'intervallo $(0,1)$ allora l'argomento dell'integrale precedente è zero e di conseguenza anche il risultato dell'integrazione è zero. Consideriamo il caso $x \in (0,1)$.

$$f_X(x) = \int_0^x \frac{\alpha y}{x} dy = \left| \frac{\alpha}{x} \frac{y^2}{2} \right|_{y=0}^{y=x} = \frac{\alpha x}{2} = 2x$$

$$f_{(X)}(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Notare che la funzione $f_X(x)$ è una funzione della sola variabile x e al secondo membro della precedente espressione assolutamente non può essere presente la variabile y. Tutt'al più è possibile scrivere $\frac{\alpha x}{2}$ al posto di $2x$. α in questo caso è ammesso perché α non è una variabile ma un parametro.

$$F_{(X)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \quad x < 0 \\ x^2 & \text{se } \ 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } \ 1 < x \end{cases}$$

Notare che la funzione di ripartizione F_X di una variabile aleatoria continua deve essere continua.

(c)

Per $y \in (0,1)$ si ha:

$$f_Y(y) = \int_y^1 \frac{\alpha y}{x} dx = |\alpha y \log(x)|_{x=y}^{x=1} = -4y \log(y)$$

$$f_{(Y)}(y) = \begin{cases} -4y \log(y) & \text{se } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Notare che i valori assunti dalla funzione f_Y sono positivi perché per $y \in (0,1)$ si ha $\log(y) < 0$.

$$F_{(Y)}(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } \quad y < 0 \\ y^2(1 - 2\log(y)) & \text{se } \ 0 < y < 1 \\ 1 & \text{se } \ 1 < y \end{cases}$$

Anche in questo caso è possibile verificare che la funzione F_Y è continua sebbene in questo caso il calcolo del limite: $\lim_{y \to 0^+} y^2(1 - 2\log(y))$ non è ovvio.

(d)

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \ f_X(x) dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y \ f_Y(y) dy = \int_0^1 -4y^2 \log(y) dy = \frac{4}{9}$$

Notare che i risultati dei valori attesi sono dei numeri non possono assolutamente dipendere dalle variabili x e y. Tutt'al più sarebbe stato possibile scrivere $\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{6}$ perché α è un parametro, una costante fissa nel nostro caso $\alpha = 4$.

(e)

$$\mathbb{E}[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{(X,Y)}(x,y) dy dx$$

$$\mathbb{E}[XY] = \int_0^1 \left(\int_0^x xy \frac{\alpha y}{x} dy \right) \, dx = \int_0^1 \left(\int_0^x 4y^2 dy \right) \, dx =$$

$$\mathbb{E}[XY] = \int_0^1 \frac{4}{3} x^3 \, dx = \frac{1}{3}$$

$$COV(X,Y) = \frac{1}{3} - \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{27}$$