

Secondo appello di
Istituzioni di probabilità
Laurea Triennale in scienze statistiche
Matr pari
13/09/2018

COGNOME e NOME

N. MATRICOLA.....

Esercizio 1.

Supponiamo che la matrice $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$ sia aleatoria nel senso che i suoi 4 coefficienti sono variabili aleatorie. Assumiamo che i 4 coefficienti siano variabili aleatorie indipendenti che possano assumere solo valori 0 o 1 con probabilità $p = \frac{1}{2}$.

Qual è la probabilità che la matrice A sia invertibile? (Una matrice è invertibile se il suo determinante è diverso da 0.)

Esercizio 2.

Supponiamo di avere due urne A e B . Nell'urna A ci sono 4 palline bianche e 4 nere mentre nell'urna B ci sono 3 palline bianche, 2 palline rosse e 1 pallina nera. Viene lanciata una moneta equilibrata, se esce testa viene estratta una pallina dall'urna A mentre se esce croce viene estratta una pallina dall'urna B .

- (a) Qual è la probabilità che venga estratta una pallina bianca.
- (b) Qual è la probabilità che venga estratta una pallina rossa.
- (c) Qual è la probabilità che venga estratta una pallina nera.
- (d) Qual è la probabilità che il risultato del lancio sia stato testa sapendo che la moneta estratta è bianca?
- (e) Qual è la probabilità che il risultato del lancio sia stato testa sapendo che la moneta estratta è rossa?
- (f) Qual è la probabilità che il risultato del lancio sia stato testa sapendo che la moneta estratta è nera?

Supponiamo ora per i quesiti che seguono di ripetere 100 volte la seguente procedura: viene lanciata una moneta equilibrata, se esce testa viene estratta una pallina dall'urna A mentre se esce croce viene estratta una pallina dall'urna B . (Le palline sono reinserite nell'urna durante ogni iterazione.) Sia X il numero totale di palline nere estratte durante le 100 iterazioni.

- (e) Calcolare la distribuzione di X .
- (f) Stimare la probabilità che X sia maggiore di 40.

Esercizio 3.

Siano X , Y e Z tre variabili aleatorie indipendenti con distribuzioni:

$$X \sim \text{Poisson}(p = \frac{1}{2}) \quad Y \sim \text{esp}\left(\lambda = \frac{1}{2}\right) \quad Z \sim \text{Unif}\{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

Siano inoltre assegnate le variabili:

$$W := X \cdot Y \cdot Z \quad T = \min\{X, Z\}$$

- (a) Calcolare media e varianza della variabile aleatoria Z .
- (b) Calcolare $\mathbb{E}[Z^6]$
- (c) Calcolare $\mathbb{E}[(X - Y) \cdot (Z + W)]$
- (d) Calcolare media e varianza della variabile aleatoria W .
- (e) Calcolare $P(W \leq 0)$.
- (f) Calcolare $P(T \leq 0)$.
- (g) Calcolare $P(T \leq \frac{4}{3})$.
- (h) Calcolare la funzione di ripartizione F_T .

Esercizio 4.

Sia (X, Y) un vettore aleatorio assolutamente continuo. Con supporto sull'insieme D

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > 0\}$$

e funzione di densità f_X

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(x+2y)} & \text{se } (x, y) \in D \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sia inoltre $Z := X + Y$

- (a) Calcolare funzione di densità e di ripartizione della variabili aleatoria X .
- (b) Calcolare funzione di densità e di ripartizione della variabili aleatoria Y .
- (c) Le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti. Giustificare la risposta.
- (d) Calcolare $P(Z \leq 1)$.
- (e) La funzione di ripartizione della variabile aleatoria Z .

Esercizio 5.

Determinare un esempio di funzione di densità discreta di una variabile aleatoria X tale che:

$$P(X \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}) = 1 \qquad \mathbb{E}[X] = 0 \qquad Var(X) = \frac{8}{3}$$

