Quarto appello di
Istituzioni di probabilità
Laurea Triennale in scienze statistiche
Matr pari
04/02/2018

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA...

Esercizio 1.
Una macchina per il confezionamento del riso riempe i contenitori con una quantità di riso casuale, rappresentata da una v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Il valore di riempimento ideale sarebbe 1 Kg, ma vi è una certa tolleranza: una confezione è considerata *accettabile* se contiene tra 990gr e 1010gr di riso, e *difettosa* altrimenti.
(a) Se $\mu = 1000$ e $\sigma = 5$. Qual è la probabilità che una confezione sia difettosa.
(b) Supponiamo ancora che $\mu = 1000$, per quali valori di σ la probabilità che una confezione sia difettosa è minore del 2%?

Esercizio 2.

Supponiamo di avere due urne A e B. Nell' urna A ci sono 4 pallina numerate da 1 a 4 mentre nell'urna B ci sono 8 palline numerate da 1 a 8. Vengono estratte due palline una dall'urna A e l'altra dall'urna B. Sia X il numero estratto dall'urna A mentre sia Y il numero estratto dall'urna B.

(a) Qual è la probabilità che siano estratti due 3?

(b) Qual è la probabilità che sia estratto almeno un numero minore stretto di 3?

(c) Qual è la probabilità che sia estratto almeno un 7?

(d) Qual è la probabilità che i due numeri estratti sia esattamente 3 e 7?

(e) Sapendo che è stato estratto almeno un 3 qual è la probabilità che sia stato estratto anche un 7?

(f) Qual è la probabilità che il prodotto dei due numeri estratti sia uguale a 6?

Esercizio 3.
Siano X, Y e Z tre variabili aleatorie indipendenti con distribuzioni:

$$X \sim Bern\left(p = \frac{1}{3}\right) \qquad Y \sim esp\,(\lambda = 1) \qquad Z \sim Unif(0,3)$$

Siano inoltre assegnate le variabili:

$$W := 1 \cdot X + 2 \cdot Y + 3 \cdot Z \qquad T = \max\{X, Z\}$$

(a) Calcolare media e varianza della variabile aleatoria W.
(b) Calcolare $\mathbb{E}[Z^3]$.
(c) Calcolare $\mathbb{E}[Z(Z + X)(Z + Y)]$.
(d) Calcolare $P(X > Z)$.
(e) Calcolare la funzione di ripartizione F_T.

Esercizio 4.
Sia (X, Y) un vettore aleatorio assolutamente continuo. Con supporto sull'insieme D

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < y < x < 1\}$$

e funzione di densità f_X

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \alpha y & \text{se } (x, y) \in D \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Calcolare funzione di densità e di ripartizione della variabili aleatoria X.
(b) Calcolare funzione di densità e di ripartizione della variabili aleatoria Y.
(c) Le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti. Giustificare la risposta.
(d) Calcolare $P(X + Y > 1)$.

Esercizio 5.
Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua con la seguente funzione di densità:

$$f_X(x) = \alpha e^{-|x+1|}$$

(a) Calcolare α.
(b) Calcolare la funzione generatrice dei momenti della variabile aleatoria X.