Appello 1
Istituzioni di probabilità (mat.pari)
Laurea Triennale in scienze statistiche
21/06/2018

Candidato: **COMPAGNO MATTIA**

N.Matricola: **1171930**

Posto a sedere: **B 20**

Esercizio 1.(2 punti)
Le sei lettere AEESTT vengono ordinate a caso. Qual è la probabilità di ottenere la parola ESTATE?

Calcoliamo il numero di parole diverse che si possono comporre con le sei lettere date, ossia i ~~capi~~ casi possibili:

$$\frac{6!}{\underbrace{2!}_{\text{PERMUTAZIONI DELLE "E"}}\ \underbrace{2!}_{\text{PERMUTAZIONI DELLE "T"}}}$$

La parola "ESTATE" è una delle parole che si possono comporre ed essendo ogni caso possibile equiprobabile e disgiunto dagli altri possiamo applicare la formula:

$$\mathbb{P}(\text{ESTATE}) = \frac{\text{CASI FAVOREVOLI}}{\text{CASI POSSIBILI}} = \frac{1}{\left(\frac{6!}{2!\,2!}\right)} = 1/180$$

Esercizio 2.(6 punti)
Da uno studio statistico risulta che il peso di una confezione di pasta ha una distribuzione normale $N(\mu, \sigma^2)$ con media $\mu = 500gr$ e deviazione standard $\sigma = 15gr$.
(a) Se scelgo una confezione a caso, qual è la probabilità che pesi meno di $470gr$?
(b) Se scelgo 1000 confezioni a caso. Qual è la probabilità che il peso complessivo sia minore di $499Kg$?
(c) Qual è la probabilitá che su 1000 confezioni ce ne siano più di 30 che pesano meno di $470gr$?

(a) X = Peso di una confezione di pasta $\quad X \sim N(\mu = 500g, \sigma^2 = 225g)$

$\mathbb{P}(X < 470gr) = ? \qquad \frac{X-\mu}{\sigma} = Z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$

$$\mathbb{P}(X<470) = \mathbb{P}\left(\frac{X-500}{15} < \frac{470-500}{15}\right) = \mathbb{P}(Z<-2) = \mathbb{P}(Z \leq -2) =$$
$$= 1 - \Phi(2) = 1 - 0.97725 = 0.02275$$

(b) $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_{1000} \qquad Y \sim N(\mu = 500\,kg, \sigma^2 = \cancel{225\,kg^2}\ 0.225\,kg^2)$ per il teorema del limite centrale

$\cancel{\mathbb{P}(Y<499kg)} = \qquad \frac{Y-\mu}{\sigma} = Z \sim N(\mu=0, \sigma^2=1)$

$$\cancel{= \mathbb{P}\left(\frac{Y-500}{15} < \frac{499-500}{15}\right) = \mathbb{P}(Z<-0.06) = 1 - \mathbb{P}(Z<0.06) = 1 - 0.52392 = 0.4760}$$

$VAR[Y] = VAR[X_1 + \ldots + X_{1000}] = 1000\, VAR[X_1] = 225\,000\ gr^2$

$\sigma_Y = 474{,}34\ gr = 0.474\ kg$

$\mathbb{P}(Y < 499kg) = \qquad \frac{Y-\mu}{\sigma} = Z \sim N(\mu=0, \sigma^2=1)$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{Y-500kg}{0.474kg} < \frac{499-500}{0.474}\right) = \mathbb{P}(Z<-2.11) = 1 - \mathbb{P}(Z<2.11) = 1 - 0.98257$$
$$= 0.0174$$

(c) $K = \begin{cases} 0 & \text{se una confeziono pesa di più di } 470gr \\ 1 & \text{se una confeziono pesa meno di } 470gr \end{cases} \qquad \mathbb{P}(K=1) = 0.02275 \qquad K \sim Bern(0.02275)$

$W = K_1 + K_2 + \ldots + K_{1000}$

$W \sim Bin(n=1000, p=0.02275)$ $\quad$ siccome $VAR[W] = n \cdot p(1-p) = 22.23 > 10$

$\Downarrow$ l'approssimazione normale quindi è una buona approssimazione

$\mathbb{E}[W] = n \cdot p = 22.75$

$\mathbb{P}(W > 30) = \cancel{\mathbb{P}\left(\frac{W-22.75}{4.71} > 30\right)}$

CORREZIONE DI CONTINUITÀ $\to$ $= \mathbb{P}(W \geq 30.5) = \mathbb{P}\left(\frac{W-22.75}{4.71} \geq \frac{30.5-22.75}{4.71}\right) =$

$$= \mathbb{P}(Z \geq 1.64) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq 1.64) = 1 - \Phi(1.64) = 1 - 0.9495 =$$
$$= 0.0505$$

Esercizio 3.(4 punti)
Sia X una variabile aleatoria reale assolutamente continua con densità f_X.

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha(1-x^2) & |x| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Calcolare α.
(b) Calcolare la media della variabile aleatoria X.
(c) Calcolare la varianza della variabile aleatoria X.
(d) Calcolare $\mathbb{E}[X^n]$ con $n \in \mathbb{N}$.

(a) $\int_{-1}^{1} \alpha(1-x^2)\,dx = \alpha\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=1} = \cancel{\alpha\left(1-\frac{1}{3}-1\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{2}{3}\alpha}$

$= \alpha\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right) = \alpha\left(2-\frac{2}{3}\right) = \alpha\left(\frac{6-2}{3}\right) = \frac{4}{3}\alpha$

$\frac{4}{3}\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{4}$

(b) $\mathbb{E}[X] = \int_{-1}^{1} x\, f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \alpha(x-x^3)\,dx =$

$= \alpha\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{x=-1}^{x=1} = \alpha\left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{4}}\right) = 0$

(c) $\mathrm{VAR}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$

$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-1}^{1} \alpha(x^2-x^4)\,dx = \alpha\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{x=-1}^{x=1} = \alpha\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) =$

$= \alpha\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right) = \alpha\left(\frac{10-6}{15}\right) =$

$= \frac{3}{\cancel{4}}\left(\frac{\cancel{4}}{15}\right) = \frac{1}{5}$

(d) $\mathbb{E}[X^n] = \int_{-1}^{1} \alpha(x^n - x^{n+2})\,dx = \alpha\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+3}}{n+3}\right]_{x=-1}^{x=1} =$

$\overset{*}{=} \alpha\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+3}\right)$ *SE n È PARI

ALTRIMENTI SE n È DISPARI

$\mathbb{E}[X^n] = 0$

$\mathbb{E}[X] = 1/3 \quad VAR[X] = 2/9 \quad \mathbb{E}[X^2] = 1/3$
$\mathbb{E}[Y] = 2 \quad VAR[Y] = 2 \quad \mathbb{E}[Y^2] = 6$
$\mathbb{E}[Z] = 1/2 \quad VAR[Z] = 1/4 \quad \mathbb{E}[Z^2] = 1/2$

Esercizio 4.(10 punti)
Siano X, Y e Z tre variabili aleatorie indipendenti con distribuzioni:

$$X \sim Bern(1/3) \qquad Y \sim Poisson(\lambda = 2) \qquad Z \sim Esp(\lambda = 2)$$

Siano inoltre assegnate le seguenti variabili aleatorie:

$$S := X + Y + Z \qquad W := X \cdot Y \cdot Z$$
$$T := \min(X, Y) \qquad R := min(X, Y, Z)$$

(a) Calcolare media e varianza di S.
(b) Quanto vale $P(S < 1)$?
(c) Calcolare media e varianza di W.
(d) Quanto vale $P(W = 0)$?
(e) Calcolare la distribuzione T.(È sufficiente indicare la densitá discreta)
(f) la distribuzione della v.a. T appartiene da una famiglia di v.a. nota? Quali sono gli eventuali parametri?
(g) Calcolare $P(R = 0)$.
(h) Calcolare $P(R = 1)$.
(i) Calcolare $P(R \leq \frac{1}{2})$.
(l) Calcolare la funzione di ripartizione F_R della variabile aleatoria R.

ⓐ $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[X+Y+Z] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Z] = 1/3 + 2 + 1/2 = \frac{2+12+3}{6} = 17/6$

$VAR[S] \overset{\text{INDIPENDENZA}}{=} VAR[X] + VAR[Y] + VAR[Z] =$

$= (1/3 \cdot 2/3) + 2 + 1/2^2 = \frac{2}{9} + 2 + 1/4 = \frac{8+72+9}{36} = 89/36$

ⓑ $\mathbb{P}(S < 1) = ? = \mathbb{P}(X=0, Y=0, Z<1) =$

$= \mathbb{P}(X=0) \cdot \mathbb{P}(Y=0) \cdot \mathbb{P}(Z<1) = 2/3 \cdot e^{-2} \cdot \frac{2^0}{0!} \cdot (1 - e^{-2 \cdot 1}) =$

$= 2/3 \cdot e^{-2} (1 - e^{-2}) = 2/3 e^{-2} - 2/3 e^{-4}$

ⓒ $\mathbb{E}[W] \overset{\text{INDIPENDENZA}}{=} \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] \cdot \mathbb{E}[Z] =$

$= 1/3 \cdot 2 \cdot 1/2 = 1/3$

$VAR[W] = \mathbb{E}[W^2] - (\mathbb{E}[W]^2) = \mathbb{E}[X^2] \cdot \mathbb{E}[Y^2] \cdot \mathbb{E}[Z^2] - 1/9 =$

$= (VAR[X] + (\mathbb{E}[X])^2)(VAR[Y] + (\mathbb{E}[Y])^2)(VAR[Z] + (\mathbb{E}[Z])^2) - 1/9 =$

$= (2/9 + 1/9)(2+4)(1/4 + 1/4) - 1/9 = (1/3)(6)(1/2) - 1/9 =$

$= 1 - 1/9 = 8/9$

(d) $\mathbb{P}(W=0) = ? = \mathbb{P}(X=0, \overbrace{Y\geq 1}^{Y\neq 0}, Z>0) + \mathbb{P}(X\geq 1, Y=0, Z>0) +$

$$+ \underbrace{\mathbb{P}(X\geq 1, Y\geq 1, Z=0)}_{=0} + \mathbb{P}(X=0, Y=0, Z>0) =$$

$$= \mathbb{P}(X=0)\cdot(1-\mathbb{P}(Y=0)) + \mathbb{P}(Y=0)\cdot(1-\mathbb{P}(X=0)) +$$

$$+ \mathbb{P}(X=0)\cdot\mathbb{P}(Y=0) =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot(1-e^{-2}) + e^{-2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot e^{-2} =$$

$$= \frac{2}{3} \cancel{-\frac{2}{3}e^{-2}} + \frac{1}{3}e^{-2} \cancel{+\frac{2}{3}e^{-2}} = \frac{1}{3}(2+e^{-2})$$

(e) ~~$T\in\{0,1\}$~~

$P(T\in\{0,1\})=1$

$$\mathbb{P}(T=0) = \mathbb{P}(X=0, Y=0) + \mathbb{P}(X=1, Y=0) + \mathbb{P}(X=0, Y\neq 0) =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot e^{-2} + \frac{1}{3}\cdot e^{-2} + \frac{2}{3}\cdot(1-e^{-2}) =$$

$$= e^{-2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}e^{-2} = \frac{1}{3}(e^{-2}+2)$$

$$\mathbb{P}(T=1) = \cancel{\mathbb{P}(T} = \mathbb{P}(X=1, Y=1) + \mathbb{P}(X=1, Y>1) =$$

$\mathbb{P}(T=1) = 1-\mathbb{P}(T=0)$

$$= \frac{1}{3}\cdot e^{-2}\cdot\frac{2^1}{1} + \frac{1}{3}\cdot\left(1-(e^{-2}+e^{-2}\cdot 2)\right) =$$

$$= \frac{2}{3}e^{-2} + \frac{1}{3} - e^{-2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-2} = \frac{1}{3}(1-e^{-2})$$

(f) $T \sim \text{Bern}\left(p = \frac{1}{3}(1-e^{-2})\right)$

~~(g) $\mathbb{P}(R=0)$~~

(l) $F_R = \mathbb{P}(R\leq a) = 1 - \mathbb{P}(X>a)\,\mathbb{P}(Y>a)\,\mathbb{P}(Z>a) = 1-(1-F_X(a))(1-F_Y(a))(1-F_Z(a)) =$

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & a<0 \\ 2/3 & 0\leq a<1 \\ 1 & \text{se } a\geq 1 \end{cases} \qquad F_Y(a) = \begin{cases} 0 & a<0 \\ e^{-2} & 0\leq a<1 \\ 3e^{-2} & 1\leq a<2 \\ \vdots & \end{cases} \qquad F_Z(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a<0 \\ 1-e^{-2a} & \text{se } a\geq 0 \end{cases}$$

$$F_R(a) = \begin{cases} 1-(1-0)(1-0)(1-0) & \text{se } a<0 \\ 1-(\overbrace{1-2/3}^{1/3})(1-e^{-2})(\cancel{1}-\cancel{1}+e^{-2a}) & \text{se } 0\leq a<1 \\ 1-0 & \text{se } a\geq 1 \end{cases} \qquad F_R(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a<0 \\ 1-\frac{1}{3}e^{-2a}(1-e^{-2}) & \text{se } 0\leq a<1 \\ 1 & \text{se } a\geq 1 \end{cases}$$

PUNTI (g), (h) e (i) SONO NELL'ULTIMA FACCIATA.

Esercizio 5.(punti 12=1+2+2+1+2+2+2)
Sia (X, Y) un vettore aleatorio assolutamente continuo con funzione di densità f_X assegnata:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \alpha(1-x+y) & \text{se } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Calcoalre α.
(b) Calcolare la funzione di densità f_X e la funzione di ripartizione F_X della v.a. X.
(c) Calcolare la funzione di densità f_Y e la funzione di ripartizione F_Y della v.a. Y.
(d) Calcolare la funzione di rischio della v.a. X.
(e) Calcolare le medie $\mathbb{E}[X]$ e $\mathbb{E}[Y]$ delle variabili aleatorie X e Y.
(f) Calcolare $\mathbb{E}[XY]$ e la covarianza $Cov(X,Y)$.
(g) Sia U una variabile aleatoria con distribuzione $Unif(0,1)$. Individuare (se esiste) una funzione $g : (0,1) \to (0,1)$ tale che posto $Z := g(U)$ si abbia $Z \sim X$.

(a) $\int_0^1 \left(\int_0^1 \alpha(1-x+y)\,dy \right) dx = \alpha \int_0^1 \left[y - yx + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx =$

$= \alpha \int_0^1 (1 - x + 1/2)\,dx = \alpha \int_0^1 (3/2 \cancel{1} - x)\,dx = \alpha \left[\frac{3}{2}x - \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} =$

$= \alpha(3/2 - 1/2) = \alpha \qquad \alpha = 1 \quad \Rightarrow \cancel{\alpha = 1}\ \alpha = 1$

(b) $f_X(x) = \int_0^1 \alpha(1-x+y)\,dy = \alpha \left[y - yx + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = \alpha(1 - x + 1/2) =$
$= \cancel{3-2x}\ 3/2 - x$

$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \cancel{\text{se } x<0} \text{ ALTRIMENTI} \\ \frac{3}{2} - x & \text{se } 0<x<1 \end{cases}$

$F_X(x) = \int_0^x \frac{3}{2} - a\,da = \left[\frac{3a}{2} - \frac{a^2}{2} \right]_{a=0}^{a=x} = \frac{3x}{2} - \frac{x^2}{2}$ $\qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x<0 \\ \frac{3x}{2} - \frac{x^2}{2} & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$

(c) $f_Y(y) = \int_0^1 \alpha(1-x+y)\,dx = \alpha \left[x - \frac{x^2}{2} + xy \right]_{x=0}^{x=1} = 1 - 1/2 + y = y + 1/2$

$f_Y(y) = \begin{cases} y + 1/2 & \text{se } 0<y<1 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$

$F_Y(y) = \int_0^y (a + 1/2)\,da = \left[\frac{a^2}{2} + a/2 \right]_{a=0}^{a=y} = \frac{y^2}{2} + y/2 = \frac{y}{2}(y+1)$

$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y<0 \\ y/2\,(y+1) & \text{se } 0 \le y < 1 \\ 1 & \text{se } y \ge 1 \end{cases}$

(d) $\lambda_X(t) = \frac{F_X(t)}{1-F_X(t)} = \frac{3/2 - t}{1 - 3/2 t + t^2/2} = $ SE $0<t<1$ $= \frac{3-2t}{2-3t+t^2} = \frac{3-2t}{(t-1)(t-2)}$

(e) $E[X] = \int_0^1 x f_X(x)\,dx = \int_0^1 x(3/2 - x)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x - x^2\right) dx =$

$= \left[\frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} = 3/4 - 1/3 = \frac{9-4}{12} = 5/12$

$E[Y] = \int_0^1 y\, f_Y(y)\,dy = \int_0^1 y(y + 1/2)\,dy = \int_0^1 (y^2 + y/2)\,dy =$

$= \left[\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{4}\right]_{y=0}^{y=1} = 1/3 + 1/4 = \frac{4+3}{12} = 7/12$

(f) $E[XY] = \int_0^1 \left(\int_0^1 x y(1-x+y)\,dy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 xy - x^2 y + xy^2\,dy\right) dx =$

$= \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} - \frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \left(x/2 - x^2/2 + x/3\right) dx =$

$= \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{6}\right]_{x=0}^{x=1} = 1/4 - \cancel{1/6} + \cancel{1/6} - 0 - 0 - 0 = 1/4$

$COV(X,Y) = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y] =$

$= 1/4 - 5/12 \cdot 7/12 = 1/4 - \frac{35}{144} = \frac{36}{144} - \frac{35}{144} = 1/144$

(g) Trovo la pseudo inversa di F_X:

$y = 3/2\, x - x^2/2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2y = 0$ $\qquad x_{1,2} = \frac{+3 \mp \sqrt{9-8y}}{2}$

$x_1 = \frac{3 + \sqrt{9-8y}}{2}$ $\qquad \underbrace{x_2 = \frac{3 - \sqrt{9-8y}}{2}}$

SCELGO x_2 perché con $y \in (0,1)$ assume valori in $(0,1)$

Quindi la funzione

$g:(0,1) \to (0,1)$ cercata è la seguente: $Z = g(U) = \frac{3-\sqrt{9-8U}}{2}$

$Z \sim X$

ESERCIZIO 4

g) $\mathbb{P}(R=0) = \mathbb{P}(X=0, Y=0, Z>0) + \mathbb{P}(X=0, Y\neq 0, Z>0) +$
$+ \mathbb{P}(X=1, Y=0, Z>0) =$
$= \frac{2}{3}\cdot e^{-2} + \frac{2}{3}\cdot(1-e^{-2}) + \frac{1}{3}\cdot e^{-2} =$
$= \cancel{\frac{2}{3}e^{-2}} + \frac{2}{3} - \cancel{\frac{2}{3}e^{-2}} + \frac{1}{3}e^{-2} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{-2}$

h) $\mathbb{P}(R=1) = \mathbb{P}(X=1, Y=1, Z>1) + \mathbb{P}(X=1, Y>1, Z>1) =$
$= \frac{1}{3}\cdot 2e^{-2}\cdot(\cancel{1}-\cancel{1}+e^{-2}) + \frac{1}{3}\cdot(1-3e^{-2})\cdot(\cancel{1}-\cancel{1}+e^{-2}) =$
$= \frac{1}{3}\cdot 2e^{-4} + \frac{1}{3}e^{-2} - e^{-4} = \frac{2}{3}e^{-4} - e^{-4} + \frac{1}{3}e^{-2} =$
$= \frac{1}{3}(e^{-2} - e^{-4}) = \frac{1}{3}e^{-2}(1-e^{-2})$

i) $\mathbb{P}(R\leq 1/2) = 1 - \frac{1}{3}e^{-2\cdot 1/2}(1-e^{-2}) = 1 - \frac{1}{3}e^{-1}(1-e^{-2})$

utilizzato $F_R(1/2)$ calcolato nel punto e)