Esercitazione del 08/05/2018

Istituzioni di Calcolo delle Probabilità

David Barbato

Variabili aleatorie esponenziali.

Minimo di v.a. esponenziali indipendenti.

Ricordiamo innanzitutto che due variabili aleatorie X_1 e X_2 sono indipendenti se e solo se comunque scelti A e B sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}$ si ha $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$.

Siano X e Y due variabili esponenziali $X \sim Esp(\lambda_1)$ e $Y \sim Esp(\lambda_2)$.

Proposizione Se $X \sim Esp(\lambda_1)$, $Y \sim Esp(\lambda_2)$, X e Y sono indipendenti e $Z := \min\{X, Y\}$ allora anche Z è una variabile aleatoria esponenziale e vale $Z \sim Esp(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Esercizio 1. Sia X una v.a. aleatoria assolutamente continua con densità f_X data da

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ cxe^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

- (a) Determinare la costante c .
- (b) Determinare la funzione di ripartizione F_X .
- (c) Determinare la funzione di rischio di F_X .
- (d) A quale distribuzione (tra quelle viste a lezione) appartiene la distribuzione di X ? Indicare i parametri della distribuzione.
- (e) Calcolare $\mathbb{E}[X]$ e $\text{Var}[X]$. (Utilizzare il risultato del quesito (d).)

Esercizio 2. Sia X una v.a. aleatoria assolutamente continua con densità f_X data da

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\alpha-x}{2} & 0 \leq x < \alpha \\ 0 & \alpha \leq x \end{cases}$$

con $\alpha > 0$.

- (a) Determinare α .
- (b) Determinare la funzione di ripartizione F_X .
- (c) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.
- (d) Determinare la funzione di rischio di F_X .
- (e+) Sia Y una v.a. uniforme sull'intervallo $(0, 1)$, trovare una funzione g da $(0, 1)$ in $\mathbb{R}$ non decrescente tale che posto $Z = g(Y)$ si abbia $Z \sim X$.

(f) Calcolare $\mathbb{E}[g(Y)]$, utilizzando la formula per il calcolo di una funzione di variabile aleatoria assolutamente continua. (Verificare che $\mathbb{E}[g(Y)] = \mathbb{E}[X]$)

Esercizio 3. Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo inoltre che X abbia una distribuzione bernoulliana di parametro $p = \frac{1}{2}$ e che Y abbia invece una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 3$. Sia infine $Z = X + Y$ e $T = X \cdot Y$.

- (a) Calcolare il valore atteso di Z e di T .
- (b) Calcolare la funzione di ripartizione di Z .
- (c) Calcolare la funzione di ripartizione di T .
- (d) Calcolare $P(Z > 2T)$.

Esercizio 4. Sia $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $p = \frac{1}{2}$ e $\lambda = \frac{1}{2}$. Siano X_1 , X_2 e X_3 tre variabili aleatorie indipendenti. Sia X_1 v.a. con distribuzione binomiale di parametri $(3, p)$. Sia X_2 v.a. con $P(X_2 = x_1) = p$ e $P(X_2 = x_2) = 1 - p$. Sia X_3 v.a. con distribuzione esponenziale di parametro λ . Siano infine $T = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$ e $Z = X_2 + X_3$.

- (a) Calcolare media e varianza di T .
- (b) Calcolare $\mathbb{E}[e^{X_1+X_2}]$.
- (c) Calcolare $P(Z \leq 1)$, $P(Z \leq 3)$ e $P(Z \leq 5)$.
- (d) Calcolare F_Z .

Esercizio 5. Siano X_1 , X_2 e X_3 tre variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo inoltre che X_1 abbia una distribuzione bernoulliana di parametro $p = \frac{1}{4}$ che X_2 abbia una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda_1 = 2$ e che X_3 abbia una distribuzione di Poisson di parametro $\lambda_2 = 3$. Siano infine $T = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$, $Z = X_1 + X_2 + X_3$ e $W = \min\{X_1, X_2\}$.

- (a) Calcolare il valore atteso e la varianza di T .
- (b) Calcolare $P(Z < \frac{1}{2})$.
- (c) Calcolare la funzione di ripartizione di W .
- (d) Calcolare $\mathbb{E}[e^{X_2}]$.

Esercizio 6. Siano X , Y e Z tre variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che X sia esponenziale di parametro $\lambda = 2$, Y sia uniforme sull'intervallo $(0, 10)$, mentre Z ha distribuzione discreta con $P(Z = -1) = \frac{1}{4}$, $P(Z = 0) = \frac{1}{2}$ e $P(Z = +1) = \frac{1}{4}$.

- (a) Calcolare $\mathbb{E}[X + Y + Z]$.
- (b) Calcolare $\mathbb{E}[XYZ]$.
- (c) Calcolare $\mathbb{E}[Z^2]$.
- (d) Calcolare $\text{VAR}[Z]$.
- (e) Calcolare $\mathbb{E}[(X + Z)^2]$.
- (f) Calcolare $\mathbb{E}[e^Z]$.
- (g) Calcolare $\mathbb{E}[e^{X+Z}]$.

- (h) Calcolare $P(Y < Z)$.
- (i) Calcolare $\mathbb{E}[\cos(\pi Z)]$.
- (l) Calcolare $P(YZ > 2)$.

Esercizio 7. Sia X una v.a. uniforme sull'intervallo $(0, 2)$ e sia $Y := X^2$.

Qual è la distribuzione di Y ?

- (a) Qual è il supporto di Y ?
- (b) Calcolare la funzione di ripartizione F_Y .
- (c) Calcolare la densità f_Y .

Esercizio 8. Sia X una v.a. continua con densità assegnata f_X e sia $Y = -\log(X)$. Qual è la distribuzione di Y ?

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (0, 1) \\ c \log(x) & x \in (0, 1) \end{cases}$$

- (a) Quanto vale la costante c ?
- (b) Calcolare la funzione di ripartizione F_X .
- (c) Calcolare la funzione di ripartizione F_Y .
- (d) Calcolare la densità f_Y .
- (e) A quale tipo di distribuzione appartiene la distribuzione di Y . Indicarne gli eventuali parametri.

Esercizio 9. Siano $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a. indipendenti con distribuzione uniforme sull'intervallo $(0, 1)$. Sia $W := \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, $T := \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ e $Y := 1 - T$. Qual è il valore medio di W ? E quello di T ?

- (a) Calcolare la funzione di ripartizione F_W .
- (b) Calcolare la densità f_W .
- (c) Calcolare la funzione di ripartizione F_T .
- (d) Calcolare la densità f_T .
- (e) Calcolare il valore atteso $\mathbb{E}[T]$.
- (f) Calcolare la funzione di ripartizione F_Y .
- (g) Quanto vale $\mathbb{E}[W]$?

Soluzioni

Esercizio 1

- (a) $c = 1$
- (b)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-x} - xe^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

- (c) $h(t) = \frac{t}{1+t}$ per ogni $t \geq 0$

(d) $X \sim \text{Gamma}(\alpha = 2, \lambda = 1)$

(e) $\mathbb{E}[X] = 2, \text{VAR}[X] = 2.$

Esercizio 2

(a) $\alpha = 2$

(b)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x - \frac{x^2}{4} & 0 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

(c) $\mathbb{E}[x] = \frac{2}{3}$

(d) $h(t) = \frac{2}{2-t}$ per ogni $t \in (0, 2)$

(e) $g(y) = 2 - \sqrt{4 - 4y}$ per ogni $y \in (0, 1)$

Esercizio 3

(a) $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = p + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = p \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Dove la seconda uguaglianza segue dall'indipendenza di X e Y .

(b)

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(Z \leq z, X = 0) + P(Z \leq z, X = 1) \\ &= P(X + Y \leq z, X = 0) + P(X + Y \leq z, X = 1) \\ &= P(Y \leq z, X = 0) + P(1 + Y \leq z, X = 1) \\ &= P(Y \leq z, X = 0) + P(Y \leq z - 1, X = 1) \\ &= P(Y \leq z) \cdot P(X = 0) + P(Y \leq z - 1) \cdot P(X = 1) \\ &= F_Y(z) \cdot 0.5 + F_Y(z - 1) \cdot 0.5 \end{aligned}$$

Sapendo che Y è esponenziale di parametro 3, si ha

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 - e^{-3y} & y > 0 \end{cases}$$

e dunque considerando i tre casi, $z < 0$, $0 \leq z < 1$ e $z \geq 1$.

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 0.5 \cdot (1 - e^{-3z}) & 0 \leq z < 1 \\ 0.5 \cdot (1 - e^{-3z}) + 0.5 \cdot (1 - e^{-3(z-1)}) & z \geq 1 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{aligned}F_T(t) &= P(T \leq t) = P(T \leq t, X = 0) + P(T \leq t, X = 1) \\&= P(X \cdot Y \leq z, X = 0) + P(X \cdot Y \leq t, X = 1) \\&= P(0 \leq t, X = 0) + P(Y \leq t, X = 1) \\&= P(0 \leq t) \cdot P(X = 0) + P(Y \leq t) \cdot P(X = 1) \\&= P(t \geq 0) \cdot 0.5 + F_Y(t) \cdot 0.5\end{aligned}$$

considerando i due casi, $t < 0$, e $t \geq 0$ si ha:

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 0.5 + 0.5 \cdot (1 - e^{-3t}) & t \geq 0 \end{cases}$$

(d)

$$\begin{aligned}P(Z > 2T) &= P(X + Y > 2X \cdot Y) \\&= P(X + Y > 2X \cdot Y, X = 0) + P(X + Y > 2X \cdot Y, X = 1) \\&= P(Y > 0, X = 0) + P(1 + Y > 2Y, X = 1) \\&= P(Y > 0) \cdot P(X = 0) + P(Y < 1) \cdot P(X = 1) \\&= 1 \cdot 0.5 + (1 - e^{-3}) \cdot 0.5 \\&= 1 - 0.5 \cdot e^{-3}\end{aligned}$$

Esercizio 4

$$\mathbb{E}[X_1] = np = \frac{3}{2} \quad \text{VAR}(X_1) = np(1-p) = \frac{3}{4} \quad \mathbb{E}[X_1^2] = 3$$

$$\mathbb{E}[X_2] = 3 \quad \text{VAR}(X_2) = 1 \quad \mathbb{E}[X_2^2] = 10$$

$$\mathbb{E}[X_3] = \frac{1}{\lambda} = 2 \quad \text{VAR}(X_3) = \frac{1}{\lambda^2} = 4 \quad \mathbb{E}[X_3^2] = 8$$

Dove $\mathbb{E}[X_2] = 2 \cdot P(X = 2) + 4 \cdot P(X = 4) = 3$.

$$\mathbb{E}[X_2^2] = 2^2 \cdot P(X = 2) + 4^2 \cdot P(X = 4) = 10$$

$$\text{VAR}(X_2) = \mathbb{E}[X_2^2] - (\mathbb{E}[X_2])^2 = 1$$

Mentre per X_1 e X_2 si può utilizzare la formula $\mathbb{E}[X_i^2] = (\mathbb{E}[X_i])^2 + \text{VAR}(X_i)$.

(a)

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[X_1 \cdot X_2 \cdot X_3] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[X_2] \cdot \mathbb{E}[X_3] = \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 9$$

$$\mathbb{E}[T^2] = \mathbb{E}[X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2] = \mathbb{E}[X_1^2] \cdot \mathbb{E}[X_2^2] \cdot \mathbb{E}[X_3^2] = 3 \cdot 10 \cdot 8 = 240$$

$$\text{VAR}(T) = \mathbb{E}[T^2] - (\mathbb{E}[T])^2 = 240 - 81 = 159$$

(b)

$$\mathbb{E}[e^{X_1+X_2}] = \mathbb{E}[e^{X_1} \cdot e^{X_2}] = \mathbb{E}[e^{X_1}] \cdot \mathbb{E}[e^{X_2}]$$

Calcoliamo separatamente $\mathbb{E}[e^{X_1}] \mathbb{E}[e^{X_2}]$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{X_1}] &= \sum_k e^k \cdot P(X_1 = k) = \\ &= e^0 \cdot P(X_1 = 0) + e^1 \cdot P(X_1 = 1) + e^2 \cdot P(X_1 = 2) + e^3 \cdot P(X_1 = 3) = \\ \mathbb{E}[e^{X_1}] &= \frac{1 + 3e + 3e^2 + e^3}{8}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{X_2}] &= \sum_k e^k \cdot P(X_2 = k) = e^2 \cdot P(X_2 = 2) + e^4 \cdot P(X_2 = 4) = \\ \mathbb{E}[e^{X_2}] &= \frac{e^2 + e^4}{2}\end{aligned}$$

Dunque

$$\mathbb{E}[e^{X_1+X_2}] = \frac{1 + 3e + 3e^2 + e^3}{8} \cdot \frac{e^2 + e^4}{2}$$

(c) $Z = X_2 + X_3$. Prima di tutto osserviamo che X_2 può assumere solo i valori 2 e 4 mentre X_3 è una v.a. a valori in $(0, +\infty)$ con funaione di ripartizione:

$$F_{X_3}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}P(Z \leq 1) &= P(X_2 + X_3 \leq 1) = \\ &= P(X_2 = 2, X_2 + X_3 \leq 1) + P(X_2 = 4, X_2 + X_3 \leq 1) = \\ &= P(X_2 = 2, 2 + X_3 \leq 1) + P(X_2 = 4, 4 + X_3 \leq 1) = \\ &= P(X_2 = 2, X_3 \leq -1) + P(X_2 = 4, X_3 \leq -3) = 0\end{aligned}$$

Si procede in maniera analoga per $P(Z \leq 3)$

$$\begin{aligned}P(Z \leq 3) &= P(X_2 + X_3 \leq 3) = \\ &= P(X_2 = 2, X_2 + X_3 \leq 3) + P(X_2 = 4, X_2 + X_3 \leq 3) = \\ &= P(X_2 = 2, 2 + X_3 \leq 3) + P(X_2 = 4, 4 + X_3 \leq 3) = \\ &= P(X_2 = 2, X_3 \leq 1) + P(X_2 = 4, X_3 \leq -1) = \\ &= P(X_2 = 2) \cdot P(X_3 \leq 1) + P(X_2 = 4) \cdot P(X_3 \leq -1) = \\ &= \frac{1}{2}(1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot 1}) + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}}}{2}\end{aligned}$$

Calcoliamo infine $P(Z \leq 5)$

$$\begin{aligned}
 P(Z \leq 5) &= P(X_2 + X_3 \leq 5) = \\
 &= P(X_2 = 2, X_2 + X_3 \leq 5) + P(X_2 = 4, X_2 + X_3 \leq 5) = \\
 &= P(X_2 = 2, 2 + X_3 \leq 5) + P(X_2 = 4, 4 + X_3 \leq 5) = \\
 &= P(X_2 = 2, X_3 \leq 3) + P(X_2 = 4, X_3 \leq 1) = \\
 &= P(X_2 = 2) \cdot P(X_3 \leq 3) + P(X_2 = 4) \cdot P(X_3 \leq 1) = \\
 &= \frac{1}{2}(1 - e^{-\frac{3}{2} \cdot 1}) + \frac{1}{2} \cdot (1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot 1}) = 1 - \frac{e^{-\frac{3}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}}{2}
 \end{aligned}$$

(d) Procedendo in maniera analoga a quanto fatto per il punto (c) si ottiene

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 2 \\ \frac{1 - e^{-\frac{z-2}{2}}}{2} & 2 \leq z < 4 \\ 1 - \frac{e^{-\frac{z-2}{2}} + e^{-\frac{z-4}{2}}}{2} & z \geq 4 \end{cases}$$

Esercizio 5

(a) $\frac{3}{8}, \frac{87}{64}$

(b) $\frac{3}{4}(e^{-3} - e^{-4}) \simeq 0.0236$

(c) $F_W(w) = \begin{cases} 0 & w < 0 \\ 1 - \frac{1}{4}(e^{-2w}) & 0 \leq w < 1 \\ 1 & w \geq 1 \end{cases}$

(d) 2

Esercizio 7

(a) $P(Y \in (0, 4)) = 1$

(b)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{\sqrt{y}}{2} & 0 \leq y < 4 \\ 1 & y \geq 4 \end{cases}$$

(c)

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \notin (0, 4) \\ \frac{1}{4\sqrt{y}} & y \in (0, 4) \end{cases}$$

Esercizio 8(a) $c = -1$.

(b)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x(1 - \log(x)) & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

(c)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 - e^{-y}(1 + y) & y \geq 0 \end{cases}$$

(d)

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ ye^{-y} & y > 0 \end{cases}$$

(e) $Y \sim \text{Gamma}(\alpha = 2, \lambda = 1)$ **Esercizio 9**

(a)

$$F_W(w) = \begin{cases} 0 & w < 0 \\ 1 - (1 - w)^n & 0 \leq w < 1 \\ 1 & w \geq 1 \end{cases}$$

(b)

$$f_W(w) = \begin{cases} 0 & w \notin (0, 1) \\ n(1 - w)^{n-1} & w \in (0, 1) \end{cases}$$

(c)

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^n & 0 \leq t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

(d)

$$f_t(t) = \begin{cases} 0 & t \notin (0, 1) \\ nt^{n-1} & t \in (0, 1) \end{cases}$$

(e) $\mathbb{E}[T] = \frac{n}{n+1}$

(f)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 - (1 - y)^n & 0 \leq y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$$

(g) E' facile verificare che le v.a. W e Y hanno la stessa distribuzione quindi $\mathbb{E}[W] = \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[1 - T] = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$