Esercitazione del 30/05/2018
Istituzioni di Calcolo delle Probabilità

David Barbato
barbato@math.unipd.it

Somma di variabili aleatorie indipendenti.
Caso discreto.
Siano X e Y due variabili aletaroie discrete indipendenti, sia $T := X + Y$ allora per ogni $t \in \mathbb{R}$ vale:

$$\begin{aligned} P(T=t) &= P(X+Y=t) = P\left(\bigcup_{\substack{x,y \\ x+y=t}} \{X=x, Y=y\}) \right) \\ &= \sum_{\substack{x,y \\ x+y=t}} P(X=x, Y=y)) \end{aligned}$$

$$P(T=t) = \sum_{x} P(X=x, Y=t-x))$$

Caso assolutamente continuo.
Siano X e Y due variabili aletaroie assolutamente continue indipendenti con densità f_X e f_Y, sia $T := X + Y$ allora per ogni $t \in \mathbb{R}$ vale:

$$\begin{aligned} F_T(t) = P(T \le t) &= P(X+Y \le t) = \\ &= \int_{x+y\le t} f_X(x) f_Y(y) dy\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) F_Y(t-x) dx \end{aligned}$$

Dunque

$$f_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(t-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) f_X(t-y) dy \tag{1}$$

Esercizio 1. *Siano X e Y due variabili indipendenti, sia $X \sim Esp(1)$, sia $Y \sim Esp(2)$ e sia $T := X + Y$.*
(a) Qualè la distribuzione di T? (`Utilizzare l'equazione` (1).)

Esercizio 2. *Siano X e Y due variabili indipendenti, sia X assolutamente continua con distribuzione uniforme sull'intervallo $(0,1)$ e sia Y v.a. discreta con distribuzione uniforme su $\{0,1\}$. Sia infine $T := X + Y$*
(a) Verificare che Y è una v.a. di bernoulli per un certo parametro p. Quanto vale p?
*(b) Qual è la distribuzione di T? (**Indicare a quale distribuzione appartiene T e quali sono i parametri.**)*

Tecniche per generare variabili aleatorie: metodo della trasformazione inversa. (Par 10.2.1del libro di testo.)

Esercizio 3. *Sia $U \sim Unif(0,1)$, sia $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ non decrescente, sia $X := g(U)$ e supponiamo infine che X sia v.a. continua con densità f_X data da:*

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

(a) Calcolare la costante di normalizzazione α.
(b) Calcolare la funzione di ripartizione F_X.
(c) Calcolare la funzione g.

Esercizio 4. *Sia X v.a. continua con densità f_X data da:*

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2(x-2)} & x > 2 \\ 0 & x \leq 2 \end{cases}$$

(a) Verificare che f_X sia effettivamente la funzione di densità di una v.a. continua.
(b) Calcolare la funzione di ripartizione F_X.
(c) Calcolare la funzione di rischio λ_X della v.a. X.
(d) Calcolare la funzione generatrice dei momenti M_X della v.a. X.
(e) Calcolare la pseudoinversa della funzione di ripartizione F_X.
(f) Si presenti un metodo per simulare una v.a. distribuita come la v.a. X.

Esercizio 5. *Sia X v.a. continua con densità f_X data da:*

$$f_X(x) = \alpha e^{-3|x|} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

(a) Calcolare la costante di normalizzazione α.
(b) Calcolare la funzione di ripartizione F_X.
(c) Calcolare la funzione generatrice dei momenti M_X della v.a. X.
(d) Calcolare la pseudoinversa della funzione di ripartizione F_X.
(e) Si presenti un metodo per simulare una v.a. distribuita come la v.a. X.

Esercizio 6. *Sia X v.a. continua con densità f_X data da:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in (0,1) \\ \frac{1}{4} & x \in (1,3) \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Verificare che f_X sia effettivamente la funzione di densità di una v.a. continua.
(b) Calcolare la funzione di ripartizione F_X.
(c) Calcolare la funzione di rischio λ_X della v.a. X.
(d) Calcolare la funzione generatrice dei momenti M_X della v.a. X.
(e) Calcolare la pseudoinversa della funzione di ripartizione F_X.
(f) Si presenti un metodo per simulare una v.a. distribuita come la v.a. X.

Soluzioni

Esercizio 1

$$f_T(t) = \begin{cases} 2(e^{-t} - e^{-2t}) & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \qquad F_T(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - 2e^{-t} + e^{-2t}) & t > 0 \end{cases}$$

Esercizio 2
(a) $p = \frac{1}{2}$, (b) $T \sim Unif(0,2)$

Esercizio 3
La densità f_X dell'esercizio è nota come densità di Cauchy.
(a) Affinché f_X sia una densità di una v.a. continua occorre e basta che sia: 1) $f_X(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{dx} = 1$. La prima condizione ci dà $\alpha \geq 0$. Mentre dalla seconda si ricava:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{1+x^2}\mathrm{dx} = \alpha \left|\arctan(x)\right|_{x=-\infty}^{x=+\infty} = \alpha(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})) = \alpha\pi$$

dunque $\boxed{\alpha = 1/\pi}$.
(b)

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{a} \frac{\alpha}{1+x^2}\mathrm{dx} = \alpha \left|\arctan(x)\right|_{x=-\infty}^{x=a} =$$

$$F_X(a) = \alpha \left(\arctan(a) - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{\arctan(a)}{\pi} + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{F_X(x) = \frac{\arctan(x)}{\pi} + \frac{1}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

(c) Possimo calcolare g utilizzando la pseudoinversa della funzione di ripartizione (vedere proposizione 2.1 del paragrafo 10.2.1 del libro di testo). Calcolo della pseudoinversa $F^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$. Poiché $F_X : \mathbb{R} \to (0,1)$ è continua e strettamente crescente allora è invertibile e la pseudoinversa coincide con l'inversa. Sia $y \in (0,1)$ dall'equazione $y = F_X(x) = \frac{\arctan(x)}{\pi} + \frac{1}{2}$ si ricava x in funzione di y.

$$x = F^{-1}(y) = \tan\left(\left(y - \frac{1}{2} \right) \pi \right)$$

dunque

$$\boxed{X = g(U) = \tan\left(\left(U - \frac{1}{2} \right) \pi \right)}$$

Esercizio 4

(a) $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{dx} = \int_2^{+\infty} 2e^{-2(x-2)}\mathrm{dx} = 1$.

(b) $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 1 - e^{-2(x-2)} & x \geq 2 \end{cases}$

(c) $\lambda(t) = \begin{cases} 0 & x \in (0,2) \\ 2 & x \geq 2 \end{cases}$

(d) $M_X(t) = \frac{2e^{2t}}{2-t}$

(e) $F^{-1}(y) = 2 - \frac{\log(1-y)}{2} \qquad \forall y \in (0,1)$

(f) A partire da una v.a. $U \sim Unif(0,1)$ è possibile ottenere una v. a. con la densità f_X ponendo $X = 2 - \frac{\log(1-U)}{2}$ oppure (poiché in questo caso $U \sim 1 - U$) $X = 2 - \frac{\log(U)}{2}$.

Esercizio 5

Innanzitutto esplicitiamo il modulo della funzione di densità:

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{3x} & x < 0 \\ \alpha e^{-3x} & x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Per calcolare α imponiamole condizioni: 1) $f_X(x) \geq 0$ per ogni x; 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{dx} = 1$. Dalla prima condizione otteniamo $\alpha \geq 0$. Mentre interando nella seconda si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{0} f_X(x)\mathrm{dx} + \int_{0}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{dx} =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \alpha e^{3x}\mathrm{dx} + \int_{0}^{+\infty} \alpha e^{-3x}\mathrm{dx} =$$

$$= \alpha \left| \frac{e^{3x}}{3} \right|_{x=-\infty}^{x=0} + \alpha \left| \frac{e^{-3x}}{-3} \right|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{\alpha}{3} - 0 + 0 + \frac{\alpha}{3} = \frac{2}{3}\alpha$$

dunque ponendo $\frac{2}{3}\alpha = 1$ si ottiene:

$$\boxed{\alpha = \frac{3}{2}}$$

(b) Dalla definizione di funzione di ripartizione si ha $F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\mathrm{dx}$. Bisogna distinguere tra i due casi $a < 0$ $a \geq 0$. Se $a < 0$ allora

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{a} \alpha e^{3x}\mathrm{dx} = \alpha \left| \frac{e^{3x}}{3} \right|_{x=-\infty}^{x=a} = \frac{e^{3a}}{2}$$

Se $a \geq 0$ allora

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{0} \alpha e^{3x}\mathrm{dx} + \int_{0}^{a} \alpha e^{-3x}\mathrm{dx} =$$

$$= \alpha \left| \frac{e^{3x}}{3} \right|_{x=-\infty}^{x=0} + \alpha \left| \frac{e^{-3x}}{-3} \right|_{x=0}^{x=a} = \frac{1}{2} - \frac{e^{-3a}}{2} + \frac{1}{2}$$

dunque

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x}}{2} & x < 0 \\ 1 - \frac{e^{-3x}}{2} & x \geq 0 \end{cases}}$$

(c) Dalla definzione si ottiene

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{0} e^{tx} \alpha e^{3x}\mathrm{dx} + \int_{0}^{+\infty} e^{tx} \alpha e^{-3x}\mathrm{dx} =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \alpha e^{(t+3)x}\mathrm{dx} + \int_{0}^{+\infty} \alpha e^{(t-3)x}\mathrm{dx} =$$

Il primo integrale è finito solo per $t > -3$ mentre il secondo è finito solo per $t < +3$. Dunque $\mathbb{E}[e^{tX}] = +\infty$ per ogni $t \notin (-3,3)$. Supponiamo $t \in (-3,3)$, proseguendo dagli integrali precedenti si ottiene:

$$= \alpha \left| \frac{e^{(t+3)x}}{t+3} \right|_{x=-\infty}^{x=0} + \alpha \left| \frac{e^{(t-3)x}}{t-3} \right|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{\alpha}{t+3} - \frac{\alpha}{t-3} = \frac{-9}{t^2-9} = \frac{9}{9-t^2}$$

dunque

$$\boxed{M_X(t) = \frac{9}{9-t^2} \qquad \forall t \in (-3,+3)}$$

(d) Consideriamo la funzione $F_X : \mathbb{R} \to (0,1)$ definita da:
$F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x}}{2} & x < 0 \\ 1 - \frac{e^{-3x}}{2} & x \geq 0 \end{cases}.$
F_X è continua e strettamente crescente dunque è invertibile. $F_X(0) = \frac{1}{2}$ quindi se consideriamo l'equazione $y = F_X(x)$ si ha
$x < 0$ se e solo se $y \in (0, \frac{1}{2})$
$x \geq 0$ se e solo se $y \in [\frac{1}{2}, 1)$
Per calcolare la pseudoinversa di F_X basterà calcolare la funzione inversa separando i due casi $y \in (0, \frac{1}{2})$ e $y \in [\frac{1}{2}, 1)$.
Primo caso $y \in (0, \frac{1}{2})$. Sia $y = F_X(x)$ allora $x < 0$ quindi

$$y = F_X(x) = \frac{e^{3x}}{2}$$

da cui ricavando la x in funzione della y si ottiene

$$x = F^{-1}(y) = \frac{\log(2y)}{3}$$

Secondo caso $y \in [\frac{1}{2}, 1)$. Se $y = F_X(x)$ allora $x \geq 0$ quindi

$$y = F_X(x) = 1 - \frac{e^{-3x}}{2}$$

da cui ricavando la x in funzione della y si ottiene

$$x = F^{-1}(y) = \frac{-\log(2(1-y))}{3}.$$

Dunque

$$\boxed{F^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{\log(2y)}{3} & y \in (0, \frac{1}{2}) \\ \frac{-\log(2(1-y))}{3} & y \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}}$$

(e) A partire da una v.a. $U \sim Unif(0,1)$ è possibile ottenere una v. a. con la densità f_X ponendo $X = F^{-1}(U)$ cioè

$$\boxed{X = \begin{cases} \frac{\log(2U)}{3} & U \in (0, \frac{1}{2}) \\ \frac{-\log(2(1-U))}{3} & U \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}}$$

Esercizio 6

(a) Condizioni: 1) $f_X(x) \geq 0$ per ogni x;

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{dx} = \int_0^1 \frac{1}{2}\mathrm{dx} + \int_1^3 \frac{1}{4}\mathrm{dx} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

(b) $F_X(x) = \begin{cases} 0 & & x < 0 \\ \frac{1}{2}a & 0 \leq & x < 1 \\ \frac{1+a}{4} & 1 \leq & x < 3 \\ 1 & 3 \leq & x \end{cases}.$

(c) $\lambda_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{2-t} & 0 \leq & t < 1 \\ \frac{1}{3-t} & 1 \leq & t < 3 \end{cases}.$

(d) $M_X(t) = \begin{cases} \frac{e^{3t}+e^t-2}{4t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}.$

(e) $F^{-1}(y) = \begin{cases} 2y & y \in (0, \frac{1}{2}) \\ 4y - 1 & y \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}.$

(f) A partire da una v.a. $U \sim Unif(0,1)$ è possibile ottenere una v. a. con la densità f_X ponendo $X = F^{-1}(U)$ cioè

$$X = \begin{cases} 2U & U \in (0, \frac{1}{2}) \\ 4U - 1 & U \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$