Secondo appello di
Istituzioni di probabilità
Laurea Triennale in scienze statistiche
Matr pari
17/06/2019

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA..

Esercizio 1.
Un forno produce rosette di pane. Il peso di una rosetta di pane può essere rappresentato da una variabile aleatoria normale $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con $\mu = 60gr$ e deviazione standard σ. Il peso ideale sarebbe $60gr$ ed una rosetta è considerata accettabile se ha un peso compreso tra 50gr e 70gr. In un giorno vengono prodotte $N = 1000$ rosette, indichiamo con Y il numero di rosette non accettabili. Assumiamo infine che i pesi delle rosette siano indipendenti tra di loro.

(a) Se $\sigma = 5gr$ qual è la probabilità che una rosetta pesi più di $70gr$?
(b) Se $\sigma = 5gr$ qual è la probabilità che una rosetta sia difettosa?
(c) Sia ancora $\sigma = 5gr$, qual è la distribuzione di Y? Calcolare media e varianza di Y.
(d) Sia ora σ incognita. Per quali valori di σ la probabilità che una rosetta sia difettosa è minore del 10%?
(e*) Sia ancora σ incognita. Per quali valori di σ si ha $P(Y = 0) > 50\%$? (Utilizzare l'approssimazione di Poisson)

Soluzione
(a) $P(X > 70) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{70gr-\mu}{\sigma}\right) = P(Z > 2) = 1 - \Phi(2) = 0.02275$
(b) $P(D) = P(X \notin (50gr, 70gr)) = 0.0455$
(c) $Y \sim Bin(1000, 0.0455)$, $\mathbb{E}[Y] = 45.5$, $Var[y] = 43.42975$
(d)

$$P(D) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{10gr}{\sigma}\right)\right) < 0.10 \qquad \iff \qquad 1 - \Phi\left(\frac{10gr}{\sigma}\right) < \frac{1}{20}$$
$$\iff \qquad \Phi\left(\frac{10gr}{\sigma}\right) > \frac{19}{20} = 0.95 \qquad \iff \qquad \frac{10gr}{\sigma} > 1.65$$
$$\iff \qquad \sigma < 6.06gr$$

(e) Se vogliamo che valga la disuguaglianza $P(Y = 0) > \frac{50}{100}$ allora la deviazione standard σ deve essere molto piccola per cui la v.a. Y può essere approssimata da una v.a. $T \sim Poisson(\lambda)$ con $\lambda = \mathbb{E}[Y] = N \cdot P(D) =$

$1000 \cdot 2\left(1-\Phi(\frac{10gr}{\sigma})\right)$ quindi

$$P(T=0)>0.50 \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^{-\lambda}>0.50 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda<\ln 2$$
$$\Longleftrightarrow \qquad 1000 \cdot 2\left(1-\Phi\left(\frac{10gr}{\sigma}\right)\right)<\ln 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1-\Phi\left(\frac{10gr}{\sigma}\right)<\frac{\ln 2}{2000}$$
$$\Longleftrightarrow \qquad \Phi\left(\frac{10gr}{\sigma}\right)>1-\frac{\ln 2}{2000} \simeq 0.9996534$$

Usando la tavola si ricava:

$$P(T=0)>0.50 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{10gr}{\sigma}>3.39$$

ovvero

$$\sigma<2.95gr$$

Esercizio 2.
Siano X, Y e Z tre variabili aleatorie indipendenti con distribuzioni:

$$X \sim Bin\left(3, \frac{1}{2}\right) \qquad\qquad Y \sim esp(\lambda = 2) \qquad\qquad Z \sim Bern\left(\frac{2}{3}\right)$$

Siano inoltre assegnate le variabili:

$$T := X \cdot Y \cdot Z \qquad\qquad W = \min\{Y, Z\}$$

(a) Calcolare media e varianza della variabile aleatoria T.
(b) Calcolare $P(W = 1)$.
(c) Calcolare la funzione di ripartizione della variabile aleatoria W.
(d) Calcolare $P(W < Z)$.

Soluzione
(a) $\mathbb{E}[T] = \frac{1}{2}$ $\qquad \mathbb{E}[T^2] = 1 \qquad VAR[T] = \frac{3}{4}$

(b) $P(W = 1) = P(Z = 1, Y \geq 1) = \frac{2}{3}e^{-2}$

(c) $F_W(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - \frac{2}{3}e^{-2t} & 0 \leq t < 1 \\ 1 & 1 \leq t \end{cases}$

(d) Innanzitutto osserviamo che:

$$\min(Y, Z) < Z \qquad \Longleftrightarrow \qquad Y < Z$$

quindi

$$\begin{aligned} P(W < Z) = P(Y < Z) &= P(Y < Z, Z = 0) + P(Y < Z, Z = 1) = \\ &= P(Y < 0, Z = 0) + P(Y < 1, Z = 1) = \\ &= 0 \cdot \frac{1}{3} + (1 - e^{-2}) \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(1 - e^{-2}) \end{aligned}$$

Esercizio 3.
Sia (X, Y) un vettore aleatorio assolutamente continuo. Con supporto sull'insieme D

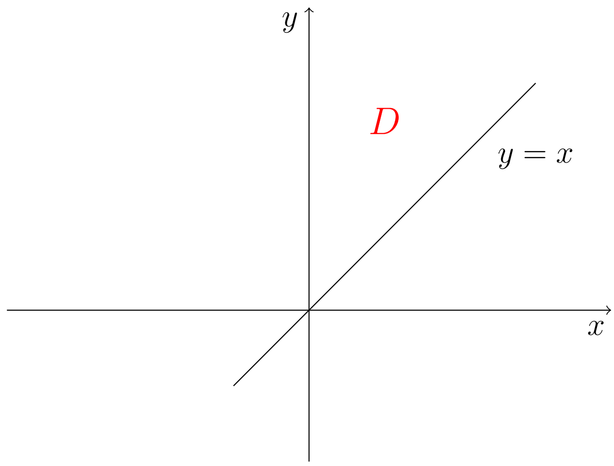
$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > x\}$$

e funzione di densità f_X

$$f_{\{}(X, Y)\}(x, y) = \begin{cases} \alpha e^{-y} & \text{se } (x, y) \in D \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Effettuare un disegno del supporto D e calcolare α.
(b) Calcolare la funzione di densità della variabili aleatoria X.
(c) Calcolare la funzione di ripartizione della variabili aleatoria X.
(d) Calcolare la funzione di densità della variabili aleatoria Y.
(e) Calcolare la funzione di ripartizione della variabili aleatoria Y.
(f) Calcolare la funzione di rischio della variabile aleatoria Y.
(g) Calcolare la funzione generatrice dei momenti della variabile aleatoria Y.

Soluzione



(a)

$$\int_0^\infty \int_x^\infty \alpha e^{-y} \, dy \, dx = \int_0^\infty \alpha e^{-x} \, dx = \alpha$$

quindi $\alpha = 1$.
(b) per $x > 0$

$$f_X(x) = \int_x^\infty e^{-y} \, dy = e^{-x}$$

quindi

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Notiamo che X è una v.a. esponenziale.
(c)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

(d) Fissato $y > 0$ si ha:

$$f_Y(y) = \int_0^y e^{-y}\, dx = ye^{-y}$$

quindi

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ ye^{-y} & y \geq 0 \end{cases}$$

(e) Per $t < 0$ vale $F_Y(t) = 0$, mentre per $t \geq 0$ si ha

$$F_Y(t) = \int_0^t ye^{-y}\, dy = \left| \, y \cdot \frac{e^{-y}}{-1} \, \right|_0^t - \int_0^t \frac{e^{-y}}{-1}\, dy = -te^{-t} - e^{-t} + 1$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 - e^{-y} - ye^{-y} & y \geq 0 \end{cases}$$

(f)

$$H_Y(t) = \frac{t}{1+t} \qquad \forall\, t \geq 0$$

(g)

$$M_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tY}] = \int_0^\infty e^{ty} ye^{-y}\, dy = \int_0^\infty ye^{y(t-1)}\, dy$$

ora si procede integrando per parti, facendo attenzione al segno di $(t-1)$. Per $t-1 > 0$ ovvero per $t > 1$ la funzione $ye^{y(t-1)}$ tende all'infinito per y che tende all'infinito quindi per $t \geq 1$ si ha $\int_0^\infty ye^{y(t-1)}\, dy = \infty$, consideriamo ora il caso $t < 1$.

$$M_Y(t) = \int_0^\infty ye^{y(t-1)}\, dy = \left| \, y \cdot \frac{e^{y(t-1)}}{t-1} \, \right|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{y(t-1)}}{t-1}\, dy = \frac{1}{(t-1)^2}$$

$$M_Y(t) = \frac{1}{(1-t)^2} \qquad \forall\, t < 1$$