Secondo appello di
Istituzioni di probabilità
Laurea Triennale in scienze statistiche
Matr pari
05/07/2019

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA...

Esercizio 1.
Vengono lanciate 7 monete regolari sia X il numero di volte che esce testa.
`Esprimere i risultati sotto forma di frazione`

(a) Qual è la probabilità che ci siano esattamente 3 teste?
(b) Qual è la probabilità che siano meno di 3?
(c) Sapendo che ci sono meno di 3 teste quale è la probabilità che ci siano esattamente 2 teste?

Soluzione

$$X \sim Bin\left(\frac{1}{2}, 7\right)$$

(a) $P(X=3) = \binom{7}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{35}{128}$
(b) $P(X<3) = +P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{128} + \frac{7}{128} + \frac{21}{128} = \frac{29}{128}$

(c) $P(X=2|X<3) = \frac{P(\{X=2\}\cap\{X<3\})}{P(X<3)} = \frac{P(X=2}{P(X<3)} = \frac{21}{29}$

Esercizio 2.
Siano X, Y e Z tre variabili aleatorie indipendenti con distribuzioni:

$$X \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 2) \qquad Y \sim Poisson(\lambda = 3) \qquad Z \sim Bin\left(p = \frac{2}{3}, n = 2\right)$$

Siano inoltre assegnate le variabili:

$$T := e^X \qquad\qquad W = \min\{Y, Z\}$$

(a) Calcolare $P(T > 3)$.
(b) Calcolare $P(W = 1)$.
(c) Calcolare la funzione di ripartizione della variabile aleatoria W.
(d) Calcolare la funzione di ripartizione della variabile aleatoria T. (`Esprimere il risultato in funzione della funzione di ripartizione di una normale standard`)

Soluzione

$P(Z=0)=\frac{1}{9} \qquad P(Z=1)=\frac{4}{9} \qquad P(Z=2)=\frac{4}{9}$

$P(Y=0)=e^{-3} \qquad P(Y=1)=3\cdot e^{-3}$

(a) $P(T>3)=P(e^X>3)=P(X>\log(3))=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{\log(3)-\mu}{\sigma}\right)$

$P(T>3)=1-\Phi\left(\frac{\log(3)-\mu}{\sigma}\right)\simeq 1-\Phi(0.0697)\simeq 0.4721$

(b) $P(W=1)=P(Z=1,Y\geq 1)+P(Z=2,Y=1)=\frac{4}{9}(1-e-3)+\frac{4}{9}\cdot 3e^{-3}$

$$P(W=1)=\frac{4}{9}+\frac{8}{9}e^{-3}$$

(c) $P(W\in\{0,1,2\})=1$

$P(W=0)=P(Z=0,Y\geq 0)+P(Z>0,Y=0)=\frac{1}{9}\cdot 1+\frac{8}{9}\cdot e^{-3}$

$$P(W=0)=\frac{1}{9}+\frac{8}{9}e^{-3}$$

dal quesito (b) $\qquad P(W=1)=\frac{4}{9}+\frac{8}{9}e^{-3}$

È possibile ottenere $P(W=2)$ o con l'equazione $P(W=0)+P(W=1)+P(W=3)=1$ o facendo il calcolo esplicito. Oppure si può eseguire il calcolo esplicito e poi utilizzare l'equazione mostrata sopra per verificare che non ci siano errori.

$P(W=2)=P(Z=2,Y\geq 2)=\frac{4}{9}(1-e^{-3}-3e^{-3})=\frac{4}{9}-\frac{16}{9}e^{-3}$

$$F_W(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{1}{9}+\frac{8}{9}e^{-3} & 0\leq\ t<1\\ \frac{5}{9}+\frac{16}{9}e^{-3} & 1\leq\ t<2\\ 1 & 2\leq\ t\end{cases}$$

(d) Se $t\leq 0$ allora $F_T(t)=0$. Sia ora $t>0$

$$F_T(t)=P(T\leq t)=P(e^X\leq t)=P(X\leq\log(t))=P\left(\frac{X-1}{\sqrt{2}}\leq\frac{\log(t)-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$F_T(t)=\begin{cases}0 & t\leq 0\\ \Phi\left(\frac{\log(t)-1}{\sqrt{2}}\right) & t>0\end{cases}$$

Esercizio 3.
Sia (X, Y) un vettore aleatorio assolutamente continuo. Con supporto sull'insieme D

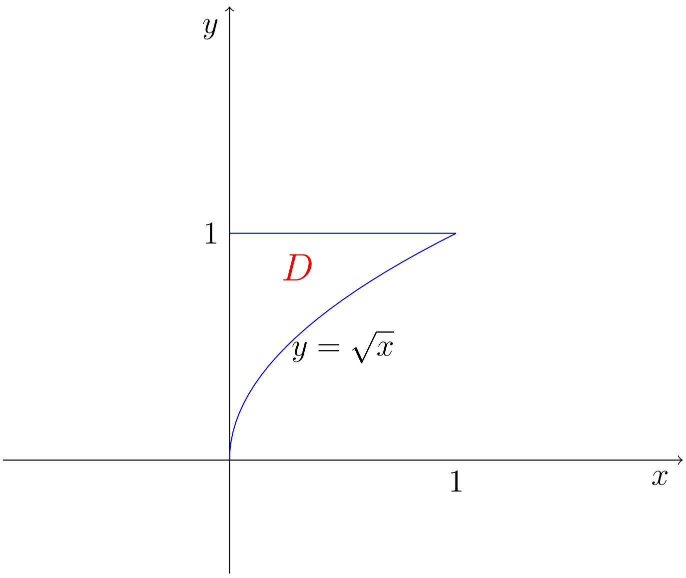
$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x < y^2 < 1, y > 0\}$$

e funzione di densità f_X

$$f_\{(X,Y)\}(x,y) = \begin{cases} \alpha(x+y) & \text{se } (x,y) \in D \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Effettuare un disegno del supporto D e calcolare α.
(b) Calcolare la funzione di densità della variabile aleatoria X.
(c) Calcolare la funzione di ripartizione della variabile aleatoria X.
(d) Calcolare la funzione di densità della variabile aleatoria Y.
(e) Calcolare la funzione di ripartizione della variabile aleatoria Y.
(f) Calcolare $\mathbb{E}[X^2Y]$

Soluzione



(a)

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \alpha(x+y)\,dy\,dx = \alpha \int_0^1 -x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\,dx = \alpha \cdot \frac{7}{20}$$

oppure

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} \alpha(x+y)\,dx\,dy = \alpha \int_0^1 \frac{y^4}{2} + y^3\,dy = \alpha \cdot \frac{7}{20}$$

Quindi

$$\alpha = \frac{20}{7}$$

(b)

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - x^{\frac{3}{2}}\right) & x \in (0,1) \\ 0 & x \notin (0,1) \end{cases}$$

(c)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \alpha\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right) & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x \end{cases}$$

(d)

$$f_Y(y) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{1}{2}y^4 + y^3\right) & y \in (0,1) \\ 0 & y \notin (0,1) \end{cases}$$

(e)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \alpha\left(\frac{1}{10}y^5 + \frac{1}{4}y^4\right) & 0 \le y < 1 \\ 1 & 1 \le y \end{cases}$$

(f)

$$\mathbb{E}[X^2Y] = \frac{67}{1080}\alpha = \frac{67}{378}$$

Esercizio 4.
Sia X una v.a. assolutamente continua con densità:

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha x^2 & \text{se } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Determinare α.
(b) Calcolare la funzione di ripartizione della variabile aleatoria X.
(c) Data $U \sim Unif(0,1)$ determinare una funzione g tale che posto $T = g(U)$ si abbia $T \sim X$.

Soluzione (a) $\int_0^2 \alpha x^2\, dx = \alpha\, \frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=2} = \alpha\frac{8}{3}$

$$\boxed{\alpha = \frac{3}{8}}$$

(b) Se $t < 0$ allora $F_X(t) = 0$. Se $t \geq 2$ allora $F_X(t) = 1$.
Sia ora $t \in (0,2)$. $F_X(t) = \int_0^t \alpha x^2\, dx = \alpha\frac{t^3}{3}$

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{t^3}{8} & 0 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq y \end{cases}}$$

(c) $g : (0,1) \to (0,2)$

$$x = g(y) \qquad y = F_X(x)$$

$$y = \frac{x}{8} \qquad \Longrightarrow \qquad x = 2\sqrt[3]{y}$$

$$\boxed{g(y) = 2\sqrt[3]{y}}$$