Esercitazione del 05/03/2019
Istituzioni di Calcolo delle Probabilità

David Barbato

Esercizio 1
Vengono lanciati due dadi regolari a 6 facce.
(a) Calcolare la probabilità che la somma dei valori ottenuti sia 9?
(b) Calcolare la probabilità che la somma dei valori ottenuti sia maggiore di 9?
(c) Calcolare la probabilità che almeno uno dei due dadi abbia dato un risultato maggiore di 4?
(d) Calcolare la probabilità che la somma dei risultati dei due dadi sia maggiore di 9 sapendo che c'è almeno un dado con risultato maggiore di 4.

Svolgimento:

Ci sono 6 esiti possibili per il primo dado e 6 esiti possibili per il secondo dado. Quindi per il principio fondamentale del calcolo combinatorio per la coppia di risultati dei due dadi ci sono $6 \cdot 6 = 36$ esiti possibili. Infine l'ipotesi "dadi regolari" ci assicura che tutti e 36 gli esiti sono equiprobabili.
Se consideriamo le somme abbiamo il seguente schema:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Per rispondere alle domande (a), (b), (c) e (d) è sufficiente calcolare il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili.

(a) Evidenziando in rosso i casi favorevoli si ricava:

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

$P(\text{somma dei dadi uguale a } 9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
(b)

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

$P(\text{somma dei dadi maggiore di } 9) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(c)

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

$P(\text{Almeno uno dei due dadi è maggiore di } 4) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

(d)

				6	7
				7	8
				8	9
				9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

$P(\text{Somma dei dadi maggiore di } 9 | \text{Almeno uno dei due dadi è maggiore di } 4) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

Esercizio 2

`Calcolo delle Probabilità 03/11/2009`

Da un mazzo di 52 carte vengono estratte 3 carte.
(a) Qual è la probabilità che vi sia almeno una carta inferiore (strettamente) a 3?

Soluzione: $1 - \frac{44 \cdot 43 \cdot 42}{52 \cdot 51 \cdot 50}$

Esercizio 3

Viene lanciata 8 volte una moneta regolare. Calcolare le seguenti probabilità.
(a) Qual è la probabilità che i primi due lanci siano testa?
(b) Qual è la probabilità che il terzo lancio sia croce?
(c) Qual è la probabilità che i primi 4 lanci siano testa?
(d) Qual è la probabilità che nei primi 3 lanci ci sia almeno una testa e

almeno una croce?
(e) Qual è la probabilità che tutti e 8 i lanci diano lo stesso esito?
(f) Sapendo che i primi 3 lanci hanno dato testa, qual è probabilità che tutti e 8 i lanci abbiano dato testa?
(g) Sapendo che il terzo lancio ha dato croce, qual è probabilità che tutti e 8 i lanci abbiano dato testa?
(h) Qual è la probabilità che nei primi 5 lanci ci siano 2 teste e 3 croci (in qualsiasi ordine)?
(i) Sapendo che tra i primi 2 lanci vi è almeno una testa, qual è la probabilità che tra i primi 2 lanci vi è almeno una croce?
(l) Sapendo che nei primi 3 lanci vi è almeno una testa, qual è la probabilità che il primo lancio abbia dato testa?

Soluzione: (a) $\frac{1}{4}$, (b) $\frac{1}{2}$, (c) $\frac{1}{16}$, (d) $\frac{3}{4}$, (e) $\frac{1}{128}$, (f) $\frac{1}{32}$, (g) 0, (h) $\frac{5}{16}$, (i) $\frac{2}{3}$, (l) $\frac{4}{7}$,

Esercizio 4
Vengono lanciati due dadi a 6 facce regolari. Calcolare le seguenti probabilità.

(a) Qual è la probabilità che siano entrambi pari?
(b) Qual è la probabilità che ci sia almeno un 5?
(c) Calcolare la probabilità che la somma sia 5.
(d) Calcolare la probabilità che la somma sia minore o uguale a 8.
(e) Calcolare la probabilità che siano entrambi minori di 6.
(f) Sapendo che la somma è uguale a 7 calcolare la probabilità che ci sia almeno un 2.
(g) Sapendo che la somma è minore o uguale a 7 calcolare la probabilità che ci sia almeno un 2.

Soluzione: (a) $\frac{1}{4}$, (b) $\frac{11}{36}$, (c) $\frac{1}{9}$, (d) $\frac{13}{18}$, (e) $\frac{25}{36}$, (f) $\frac{1}{3}$, (g) $\frac{3}{7}$,

Esercizio 5
Un contadino si affida alla previsioni metereologiche secondo le quali vi è una probabilità dell' 70% che la prossima settimana piova. Lui sa che se concimerà il suo campo, allora ci saranno un 60% di piante che seccheranno in caso che non piova mentre tale probabilità scende al 10% in caso di pioggia. Se invece decide di non concimare il suo campo ci saranno un 30% di piante che seccheranno nel caso che non piova e un 20% in caso di pioggia.
(a) Se decide di concimare il suo terreno, qual è la percentuale media di piantine che sopravviveranno?
(b) Cosa gli conviene fare se vuole massimizzare il numero medio di piantine che non seccheranno?

Soluzione: (a) 75%, (b) Se decide di non concimare la percentuale media di piantine che sopravviveranno è del 77% dunque se vuole massimizzare la percentuale media di piantine che sopravviveranno gli conviene non concimare.

Esercizio 6
`Calcolo delle Probabilità 02/07/2011`

Consideriamo due urne ed una moneta truccata. La prima urna (urna A) contiene 2 palline rosse e 4 bianche, la seconda urna (urna B) contiene una pallina rossa, una bianca e una nera. Mentre la moneta truccata ha una probabilità p ($p \in [0,1]$) di dare testa e una probabilità $1-p$ di dare croce. Lanciamo la moneta, se esce testa estraiamo una pallina dall'urna A se esce croce estraiamo una pallina dall'urna B.
(a) Calcolare la probabilità che la pallina estratta sia nera? (`Il risultato dipende dal parametro` p.)
(b) Calcolare la probabilità che la pallina estratta sia rossa?
(c) Qual è la probabilità che la moneta abbia dato testa sapendo che la pallina estratta è bianca?
(d) Per quali valori di p la probabilità di estrarre una pallina bianca è $\frac{1}{2}$?
(e) Per quali valori di p la probabilità di estrarre una pallina rossa è $\frac{1}{3}$?
(f) Per quali valori di p la probabilità di estrarre una pallina nera è $\frac{1}{4}$?

Svolgimento:
Consideriamo i seguenti eventi:
$T =$"Il risultato del lancio della moneta è testa";
$A =$"La moneta viene estratta dall'urna A";
$B =$"La moneta viene estratta dall'urna B";
$R =$"La pallina estratta è Rossa";
$N =$"La pallina estratta è Nera";
$B_i =$"La pallina estratta è Bianca";
Le ipotesi della traccia diventano: $A = T$, $B = T^c$, $P(A) = p$, $P(B) = 1-p$, $P(R|A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(B_i|A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $P(N|A) = 0$, $P(R|B) = \frac{1}{3}$, $P(B_i|B) = \frac{1}{3}$, $P(N|B) = \frac{1}{3}$.
(a) $P(N) = P(N|A) \cdot P(A) + P(N|B) \cdot P(B) = \frac{1-p}{3}$
(b) $P(R) = P(R|A) \cdot P(A) + P(R|B) \cdot P(B) = \frac{1}{3}$
(c) $P(B_i) = P(B_i|A) \cdot P(A) + P(B_i|B) \cdot P(B) = \frac{1+p}{3}$
Utilizzando Bayes $P(T|B_i) = \frac{P(B_i|T) \cdot P(T)}{P(B_i|T) \cdot P(T) + P(B_i|T^c) \cdot P(T^c)} = \frac{2p}{p+1}$
(d) $\frac{1+p}{3} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{1}{2}$
(e) $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \qquad \forall p \in [0,1]$
(f) $\frac{1-p}{3} = \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{1}{4}$