Esercitazione del 26/03/2019
Istituzioni di Calcolo delle Probabilità
Distribuzioni binomiali

David Barbato

I quesiti con asterisco '$*$' saranno accessibili dalla quinta settimana di lezione.

Esercizio 1
Vengono lanciati due dadi a 6 facce regolari. Calcolare le seguenti probabilità.

(a) Qual è la probabilità che siano entrambi dispari?
(b) Qual è la probabilità che ci sia almeno un 2?
(c) Calcolare la probabilità che la somma sia 2.
(d) Calcolare la probabilità che la somma sia minore o uguale a 5.
(e) Calcolare la probabilità che siano entrambi minori di 3.
(f) Sapendo che la somma è uguale a 6 calcolare la probabilità che ci sia almeno un 2.
(g) Sapendo che la somma è minore o uguale a 6 calcolare la probabilità che ci sia almeno un 2.

Soluzione: (a) $\frac{1}{4}$, (b) $\frac{11}{36}$, (c) $\frac{1}{36}$, (d) $\frac{5}{18}$, (e) $\frac{1}{9}$, (f) $\frac{2}{5}$, (g) $\frac{7}{15}$.

Esercizio 2 Una mensa universitaria offre 5 diversi primi, 4 diversi secondi e 3 diverse bibite. Supponiamo che ciascuno studente scelga in maniera casuale e indipendente un primo, un secondo ed una bibita.
(a) Scelti due studenti, qual è la probabilità che abbiano fatto la stessa ordinazione (stesso primo, stesso secondo e stessa bibita)?
(b) In un tavolo di dieci persone, qual è la probabilità che ci siano almeno due persone che hanno fatto la stessa ordinazione?
(c) Per festeggiare l'inizio dell'anno accademico viene offerto agli studenti un bicchiere di vino rosso o bianco a scelta. Da una statistica risulta che tra coloro che hanno scelto un secondo di carne il 70% sceglie il vino rosso e il 30% il vino bianco, viceversa tra coloro che hanno scelto il secondo di pesce il 70% sceglie il vino bianco e il 30% sceglie quello rosso. Sapendo che ci sono tre secondi di carne e uno di pesce e supponendo che ciascuno studente sceglie il proprio secondo in maniere casuale tra i 4 piatti possibili qual è la probabilità che uno studente che beve vino rosso abbia scelto il secondo di carne?

Svolgimento: (a) Le combinazioni possibili di primo, secondo e bibita

sono $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Per la casualità e l'indipendenza delle scelte si ha che ciascuna delle possibili combinazioni di primo, secondo e bibita ha probabilità $1/60$.
Indichiamo con i numeri da 1 a 60 le possibili ordinazioni e chiamiamo X_1 e X_2 le ordinazioni del primo e del secondo studente. Bisogna calcolare $P(X_1 = X_2)$.

$$P(X_1 = X_2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) + P(X_1 = 2, X_2 = 2) + \cdots + P(X_1 = 60, X_2 = 60)$$
$$P(X_1 = X_2) = \frac{1}{3600} + \frac{1}{3600} + \cdots + \frac{1}{3600}$$
$$P(X_1 = X_2) = \frac{1}{60}$$

Dunque la probabilità che due persone abbiano ordinato le stesse cose è $1/60$.
(b) Consideriamo l'evento $A :=$ "ci sono almeno due persone con la stessa ordinazione e l'evento $B := A^c =$ "tutte e dieci le persone hanno fatto ordinazioni diverse". Allora si ha $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(B)$. Per calcolare $\mathbb{P}(B)$ è sufficiente calcolare il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili.
"Casi favorevoli"$= 60 \cdot 59 \cdot \ldots \cdot 51$
"Casi possibili"$= 60^{10}$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{60 \cdot 59 \cdot \ldots \cdot 51}{60^{10}}$$
$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{60 \cdot 59 \cdot \ldots \cdot 51}{60^{10}}$$

(c) Denotiamo con A_1 A_2 ed E gli eventi:
$A_1 :=$ "È stato scelto un secondo di carne"
$A_2 :=$ "È stato scelto un secondo di pesce"
$E :=$ "È stato scelto del vino rosso".
Le ipotesi sono:

$$P(A_1) = \frac{3}{4} \qquad P(A_2) = \frac{1}{4} \qquad P(E|A_1) = 0.7 \qquad P(E|A_2) = 0.3$$

La tesi è calcolare
$$P(A_1|E)$$

Dalla formula di Bayes

$$P(A_1|E) = \frac{P(A_1)P(E|A_1)}{P(A_1)P(E|A_1) + P(A_2)P(E|A_2)} = \frac{7}{8} = 87.5\%$$

Esercizio 3
Viene lanciato un dado regolare (a 6 facce) e poi viene lanciata una moneta regolare tante volte quanto il risultato del lancio del dado. Calcolare le seguenti probabilità.
(a) Qual è la probabilità che la moneta sia lanciata 3 volte.(esattamente 3 volte)
(b) Qual è la probabilità che la moneta sia lanciata almeno 3 volte.
(c) Qual è la probabilità che il primo lancio dia "testa"?
(d) Qual è la probabilità che l'ultimo lancio dia "croce"?
(e) Se supponiamo di sapere che il risultato del dado sia "3", qual è la probabilità che sia uscita "testa" 3 volte?
(f) Qual è la probabilità che il dado abbia dato "3" e sia uscita "testa" 3 volte?
(g) Se supponiamo di sapere che il dado ha dato "4", qual è la probabilità che si sia uscita due volte "testa" e due volte "croce"?
(h) Qual è la probabilità che non si ottenga mai "testa"?
(i) Qual è la probabilità che non si ottenga mai "testa", sapendo che il dado ha dato un esito minore di 3?
(l) Qual è la probabilità che il numero di "teste" sia maggiore del numero di "croci"?

Soluzione: (a) $\frac{1}{6}$, (b) $\frac{2}{3}$, (c) $\frac{1}{2}$, (d) $\frac{1}{2}$, (e) $\frac{1}{8}$, (f) $\frac{1}{48}$, (g) $\frac{3}{8}$, (h) $\frac{63}{384}$, (i) $\frac{3}{8}$, (l) $\frac{77}{192}$,

Esercizio 4 È noto che la probabilità che un uomo sia daltonico è del 7%, mentre la probabilità che una donna sia daltonica è solo dello 0.5%. Considerato un gruppo di 30 persone costituito da 10 uomini e 20 donne scelti a caso:
(a) Qual è la probabilità che nel gruppo non ci siano persone daltoniche?
(b) Qual è la probabilità che nel gruppo ci siano esattamente un uomo daltonico e nessuna donna daltonica?
(c) Indichiamo con Z il numero totale di persone daltoniche del gruppo. Qual è il valor medio di Z?
(d) Scelta a caso una persona nel gruppo, qual è la probabilità che sia un uomo sapendo che si tratta di una persona daltonica?

Svolgimento:
Siano X_1, ... ,X_{20} variabili aleatorie associate alle 20 donne con $X_i = 1$ se la i-esima donna è daltonica e $X_i = 0$ se la i-esima donna non è daltonica. Siano Y_1, ... ,Y_{10} variabili aleatorie con $Y_i = 1$ se l'i-esimo uomo è daltonico e $Y_i = 0$ se l'i-esimo uomo non è daltonico.

Le X_i e Y_i costituiscono una famiglia di variabili aleatorie indipendenti con distribuzione bernoulliana, le X_i sono bernoulliane di parametro $p_1 = 0.005$ mentre le Y_i sono bernoulliane di parametro $p_2 = 0.07$

(a)

$$\begin{aligned}
&P(\text{"non ci sono persone daltoniche nel gruppo"}) = \\
&= P(X_1 = 0, ..., X_{20} = 0, Y_1 = 0, ..., Y_{10} = 0) = \\
&= P(X_1 = 0) \cdot ... \cdot P(X_{20} = 0) \cdot P(Y_1 = 0) \cdot ... \cdot P(Y_{10} = 0) = \\
&= (1 - 0.005)^{20} \cdot (1 - 0.07)^{10} \simeq 0.4378
\end{aligned}$$

(b) Indichiamo con X e Y rispettivamente il numero totale di donne e uomini daltonici del gruppo, cioè $X = X_1 + ... + X_{20}$ e $Y = Y_1 + ... + Y_{10}$. Le variabili X, Y quali somme di variabili aleatorie bernoulliane indipendenti sono variabili aleatorie con distribuzion binomiale, $X \sim Bin(0.005, 20)$ e $Y \sim Bin(0.07, 10)$

La probabilità che nel gruppo ci siano esattamente un uomo daltonico e nessuna donna daltonica è $P(X = 0, Y = 1)$.

$$\begin{aligned}
&P(X = 0, Y = 1) = P(X = 0) \cdot P(Y = 1) \\
&P(X = 0) = \binom{20}{0} \cdot (1 - 0.005)^{20} = 0.9046 \\
&P(Y = 1) = \binom{10}{1} \cdot (1 - 0.07)^{9} \cdot 0.07^{1} = 0.3643 \\
&P(X = 0, Y = 1) \simeq 0.33
\end{aligned}$$

(c) $E[Z] = E[X + Y] = E[X] + E[Y] = 20 * 0.005 + 10 * 0.07 = 0.8$

(d) Denotiamo con F (risp. M) l'evento la persona scelta a caso è una donna (risp. un uomo), denotiamo con D l'evento si tratta di una persona daltonica. Dalle ipotesi si ha: $P(F) = \frac{2}{3}$, $P(M) = \frac{1}{3}$, $P(D|F) = 0.005$, $P(D|M) = 0.07$

Per calcolare $P(M|D)$ utilizziamo la formula di Bayes.

$$P(M|D) = \frac{P(D|M) \cdot P(M)}{P(D|M) \cdot P(M) + P(D|F) \cdot P(F)} = \frac{0.07 \cdot \frac{1}{3}}{0.07 \cdot \frac{1}{3} + 0.005 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{7}{8}$$

Esercizio 5

`Istituzioni di Calcolo delle Probabilità 01/09/2011`

`Se possibile, indicare i risultati sotto forma di frazioni`

Alessia e Daniele possiedono due dadi a sei facce. Il dado di Daniele è regolare mentre quello di Alessia è truccato. Indichiamo con A il risultato del lancio del dado di Alessia e con D il risultato del lancio del dado di Daniele. Supponiamo infine che il dado di Alessia abbia la seguente distribuzione:

$P(A=6)=0.3$, $P(A=5)=0.2$, $P(A=4)=0.2$, $P(A=3)=0.1$, $P(A=2)=0.1$, $P(A=1)=0.1$.

(a) Calcolare $P(A>3)$.

(b) Calcolare $\mathbb{E}[A]$.

(c) Calcolare $P(D>3)$.

(d) Calcolare $P(A=6, D=6)$.

(e) Calcolare $P(A=5, D=4)$.

(f) Calcolare $P(A>3, D>3)$.

(g) Calcolare $P(A=6|A>3)$.

(h) Calcolare $P(A=6|D>3)$.

(i) Calcolare $P(A+D=11)$.

(l) Calcolare $P(A \cdot D > 20)$.

(m) Calcolare $P(A>D)$.

(n) Calcolare $P(A=6|A>D)$.

Soluzione:

	A	L	E	S	S	I	A
D		1	2	3	4	5	6
A	1	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{3}{60}$
N	2	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{3}{60}$
I	3	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{3}{60}$
E	4	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{3}{60}$
L	5	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{3}{60}$
E	6	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{3}{60}$

(a) $\frac{7}{10}$, (b) $\frac{21}{5}$, (c) $\frac{1}{2}$, (d) $\frac{1}{20}$, (e) $\frac{1}{30}$, (f) $\frac{7}{20}$, (g) $\frac{3}{7}$, (h) $\frac{3}{10}$, (i) $\frac{1}{12}$, (l) $\frac{1}{4}$, (m) $\frac{8}{15}$, (n) $\frac{15}{32}$

Esercizio 6

`Calcolo delle Probabilità 18/12/2010`

Ci sono 10 monetine di cui 5 con due teste, 2 con due croci e 3 regolari (una moneta regolare ha una faccia testa e una faccia croce e la probabilità che esca testa è uguale a quella che esca croce).
(a) Se vengono lanciate tutte e dieci le monete, qual è la probabilità che ci siano più teste che croci.
(b) Scelta una moneta a caso ed effettuato un lancio, qual è la probabilità che dia croce.
(c) Scelta una moneta a caso ed effettuato un lancio, qual è la probabilità che sia una moneta regolare sapendo che il risultato del lancio è croce.
(d)* Scelgo una moneta a caso ed effettuo 100 lanci, stimare la probabilità che si realizzino più di 60 teste. `(Lancio sempre la stessa moneta.)`

Soluzione: (a) $\frac{7}{8}$, (b) $\frac{7}{20}$, (c) $\frac{3}{7}$, (d) $\frac{1}{2} + \frac{3}{10}(1 - \Phi(2.1)) \simeq 0.50536$

Esercizio 7

`Istituzioni di Calcolo delle Probabilità 01/07/2011`
`Se possibile, indicare i risultati sotto forma di frazioni`

Consideriamo due mazzi di carte. Il primo mazzo (A) è costituito da 6 carte con i numeri $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mentre il secondo mazzo (B) è costituito da 8 carte con i numeri $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Scegliamo un mazzo a caso e estraiamo una carta a caso dal mazzo.

(a) Qual è la probabilità che la carta estratta sia un 2?

(b) Qual è la probabilità che la carta estratta sia un 10?

(c) Qual è la probabilità che la carta estratta sia un 4?

(d) Qual è la probabilità che la carta estratta sia minore (stretto) di 5?

(e) Sapendo che la carta estratta è un 3, qual è la probabilità che sia stata estratta dal mazzo A?

(f) Sapendo che la carta estratta è minore (stretto) di 5, qual è la probabilità che sia stata estratta dal mazzo A?

(g) Sia X_A il valore di una carta estratta a caso dal mazzo A. Quanto vale $\mathbb{E}[X_A]$?

(h) Sia X_B il valore di una carta estratta a caso dal mazzo B. Quanto vale $\mathbb{E}[X_B]$?

(i)* Scegliamo un mazzo a caso ed estraiamo una carta a caso. Indichiamo con X il valore della carta. Quanto vale $\mathbb{E}[X]$?

Soluzione: (a) $\frac{1}{12}$, (b) $\frac{1}{16}$, (c) $\frac{7}{48}$, (d) $\frac{11}{24}$, (e) $\frac{4}{7}$, (f) $\frac{8}{11}$, (g) $\frac{7}{2}$, (h) $\frac{13}{2}$, (i) 5.

Esercizio 8

`Calcolo delle Probabilità 13/01/2011`

Una società costruisce microprocessori. Un microprocessore può presentare 2 tipi di malfunzionamenti, (indipendenti e sovrapponibili).
I malfunzionamenti di tipo 1 hanno probabilità $p_1 = 4\%$
I malfunzionamenti di tipo 2 hanno probabilità $p_2 = 0.5\%$
Inoltre la società effettua un test sui processori prodotti in grado di individuare un malfunzionamento di tipo 1 con una probabilità del 95%.
(a) Qual è la probabilità che un microprocessore presenti entrambi i tipi di malfunzionamento?
(b) Qual è la probabilità che un microprocessore superi il test?
(c) Sapendo che un microprocessore ha superato il test, qual è la probabilità che non presenti malfunzionamenti.
(d) Su mille microprocessori che hanno superato il test qual è il numero medio di microprocessori malfunzionanti?
(e)* Su mille microprocessori che hanno superato il test (stimare) qual è la probabilità che ce ne siano più di 10 malfunzionanti?
Soluzione: (a) $\frac{1}{5000}$, (b) 96.2%, (c) $\frac{96 \cdot 995}{100 \cdot 962} \simeq 0.99293$ (d) $\simeq 7.07$
(e) $\simeq 1 - \Phi(1.29) \simeq 9.85\%$