# Esercitazione del 26/03/2019
# Istituzioni di Calcolo delle Probabilità

David Barbato

I quesiti con asterisco '*' saranno accessibili solo dalla quinta settimana di lezione.

**Esercizio 1.** *Una nota concessionaria automobilistica vende 3 diversi modelli di autovetture, disponibili in 5 colori e 3 possibili cilindrate (1900 cc ,2000 cc e 2200 cc). Supponendo che ciascuna combinazione di modello, colore e cilindrata abbia la stessa probabilità di essere scelta da un cliente, calcolare:*
*(a) quante sono le possibili combinazioni di modello, colore e cilindrata?*
*(b) qual è la probabilità che due diversi clienti abbiano ordinato la stessa autovettura (stesso modello, colore e cilindrata)?*
*(c) Se in una settimana sono state vendute 6 autovetture, qual è la probabilità che siano state vendute almeno due autovetture uguali (stesso modello, colore e cilindrata)?*
*Da una statistica risulta che il 60% dei clienti che acquistano un'autovettura di cilindrata massima (2200 cc) sceglie di avere il climatizzatore automatico, mentre questa percentuale scende al 45% per le auto di cilindrata inferiore (1900 cc e 2000 cc).*
*(d) Se in un anno sono state vendute 100 autovetture qual è il valore atteso di autovetture vendute dotate di climatizzatore automatico?*
*(e) Qual è la probabilità che sia stata venduta un'autovettura con cilindrata massima sapendo che è dotata di climatizzatore automatico?*

**Esercizio 2.** *Una nota società assicurativa ha* $N = 250000$ *assicurati, di cui* $150000$ *uomini e* $100000$ *donne. Da una statistica risulta che la probabilità di un uomo di avere un incidente grave in un anno è del* $3\%$ *mentre questa probabilità scende a* $1.5\%$ *per le donne.*
*(a) Calcolare la probabilità che una persona assicurata (scelta a caso) abbia un incidente grave nel prossimo anno?*
*(b) Sapendo che una persona assicurata ha avuto un incidente grave qual è la probabilità che si tratti di un uomo?*
*(c) Calcolare la media e la varianza del numero complessivo di assicurati che hanno un incidente grave in un anno?*
*La società assicuratrice ha stimato che se il numero di assicurati che hanno un incidente grave il prossimo anno supera* $6200$ *allora la società andrà in perdita.*
*(d)* Stimare (utilizzando l'approssimazione gaussiana) la probabilità che il numero di assicurati che hanno un incidente grave il prossimo anno superi 6200.*

**Esercizio 3.** *Nel comune di Padova sono presenti* $2500$ *lampioni, di cui* $1000$ *nel centro storico e 1500 fuori dal centro storico. Ciascun lampione è provvisto di una lampadina che ha una probabilità* $p = \frac{1}{1000}$ *di fulminarsi durante una notte. Supponiamo che tale probabilità sia indipendente dallo stato*

*di usura della lampadina e inoltre che ogni mattina avvenga la sostituzione di tutte le lampadine che si sono fulminate durante la notte.*
*(a) Qual è la probabilità che durante la notte non si fulmini nessuna lampadina? (Scrivere la formula.)*
*(b) Sapendo che durante la notte si è fulminata una sola lampadina, qual è la probabilità che sia una lampadina del centro storico?*
*(c) Qual è il numero medio e la varianza del numero totale di lampadine fulminate in un anno (365 giorni)?*
*(d)* La ditta che ha avuto l'appalto per la sostituzione delle lampadine nel 2009 ha acquistato 950 lampadine per le sostituzioni. Calcolare la probabilità che siano sufficienti. (Utilizzare l'approssimazione normale.)*

**Esercizio 4.** *Un docente ha* $70$ *studenti. Ogni volta che il docente fa ricevimento ciascuno studente può andarci o no, con probabilità* $p$ *e* $1-p$ *rispettivamente. Supponiamo* $p = 0.01$ *e assumiamo che ciascuno studente scelga di andare o no a ricevimento in maniera indipendente dagli altri.*
*(a) Indicare qual è la distribuzione del numero di studenti che si presentano ad ogni ricevimento e calcolarne la media.*
*(b) Qual è la probabilità che ad un fissato ricevimento non si presenti nessuno studente?*
*(c) Nel corso dell'anno vi sono 50 ricevimenti. Sia* $T$ *il numero di ricevimenti in cui non si presenta nessuno. Calcolare il valore medio e la varianza di* $T$.
*(d)* Stimare la probabilità che vi siano* $30$ *o più ricevimenti in cui non si presenti nessuno. (Utilizzare l'approssimazione normale.)*

**Esercizio 5.** *La pizzeria "Da Gigi" vende pizze da asporto e bibite. Il numero di pizze vendute in un giorno di apertura è una variabile aleatoria con distribuzione di Poisson di parametro* $\lambda_1 = 40$*, mentre il numero di bibite vendute in un giorno si distribuisce come una variabile di Poisson di parametro* $\lambda_2 = 0.5$*. Consideriamo inoltre il numero di bibite e pizze vendute in giorni diversi come variabili aleatorie indipendenti.*
*(a) Calcolare la probabilità che in un giorno scelto a caso (tra quelli in cui la pizzeria è aperta) venga venduta una sola bibita.*
*(b) In una settimana lavorativa di 6 giorni, qual è la probabilità che vengano vendute almeno 3 bibite?*
*(c) Il prossimo anno la pizzeria "Da Gigi" rimarra aperta* $255$ *giorni, calcolare la media e la varianza del numero totale di pizze vendute in un anno.*
*(d)* Gigi, che è un pizzaiolo parsimonioso, ha deciso che per il prossimo anno metterà da parte* $50$ *centesimi per ogni pizza venduta. Stimare la probabilità che in un anno (*$255$ *giorni lavorativi) Gigi riesca a mettere da parte più di* $5000$ *euro.*

**Esercizio 6.** *Nel gioco del superenalotto, giocando una sestina qualsiasi la probabilità di fare* $3$ *è circa* $p_3 = 0.0031$.
*(a) Se Alfredo gioca due sestine (la giocata minima) ogni concorso (ci sono due concorsi a settimana) per* $6$ *anni, quante volte farà* $3$ *in media?*
*(b) Stimare la probabilità che in* $6$ *anni non realizzi mai* $3$.

*(c) La probabilità di fare* $6$ *è circa una su* $623$ *milioni. Stimare, utilizzando l'approssimazione Poissoniana, la probabilità che Alfredo realizzi almeno un* $6$.
*(d) Supponiamo che in un concorso vengano giocate* $5$ *milioni di sestine (indipendenti e scelte in maniera casuale). Calcolare la media e la varianza del numero di* $3$ *realizzati.*
*(e)* Stimare la probabiltà che giocando* $6$ *milioni di sestine si realizzino più di* $19000$ *tre. (Utilizzare l'approssimazione gaussiana.)*

**Esercizio 7.** *Una società assicurativa ha assicurato* $200.000$ *autovetture:* $140.000$ *di grossa cilindrata e* $60.000$ *di piccola cilindrata. Da una statistica interna condotta dalla società risulta che una macchina di grossa cilindrata ha una probabilità* $p_1 = \frac{1}{70}$ *di avere un incidente grave entro un anno, mentre per le auto di piccola cilindrata questa probabilità è* $p_2 = \frac{1}{150}$. *Supponiamo infine che gli incidenti siano indipendenti tra di loro.*
*(a) Qual è il valore medio e la varianza del numero totale di assicurati che avranno un incidente grave il prossimo anno?*
*(b) Se un'autovettura assicurata ha un incidente grave qual è la probabilità che si tratti di un auto di grossa cilindrata?*
*La società assicuratrice ha stimato che se il numero di assicurati che hanno un incidente grave il prossimo anno supera* $2.500$ *allora la società andrà in perdita.*
*(c)* Stimare (utilizzando l'approssimazione gaussiana) la probabilità che il numero di assicurati che hanno un incidente grave il prossimo anno superi* $2.500$.
*(d)* Supponendo che nei prossimi dieci anni il numero di assicurati rimanga costante e che anche le probabilità di avere incidenti rimangano costanti e siano ancora indipendenti.*
*Calcolare la media e la varianza del numero di incidenti complessivi provocati dagli assicurati nei prossimi 10 anni? Qual è la probabilità che tale numero superi* $25.000$.

**Esercizio 8.** *Un'azienda produce componenti per autovetture. Da una statistica risulta che lo* $0.2\%$ *dei componenti presenta un difetto di livello 1 e lo* $0.1\%$ *presenta un difetto di livello 2, mentre il restante* $99.7\%$ *non presenta difetti. Sappiamo inoltre che durante la fase di rodaggio un componente con un difetto di livello 1 ha una probabilità di rompersi del* $65\%$ *mentre questa stessa probabilità sale al* $90\%$ *per i difetti di livello 2.*
*(a) Qual è la probabilità che un componente scelto a caso si rompa durante la fase di rodaggio?*
*(b) Se un componente si rompe durante la fase di rodaggio, qual è la probabilità che abbia un difetto di livello 1?*
*(c) L'azienda nel mese di Dicembre ha prodotto* $60000$ *componenti. Qual è la media e la varianza del numero di questi componenti che si romperà durante la fase di rodaggio?*
*(d)* Stimare la probabilità che durante il rodaggio (dei* $60000$ *componenti) ci siano più di 150 rotture.*

**Esercizio 9.** *In uno dei suoi celebri esperimenti, Mendel esaminò il colore di 580 piante di piselli. Supponiamo che ciascuna pianta di piselli abbia una probabilità* $p = \frac{1}{4}$ *di avere i frutti gialli, e che tali probabilità siano indipendenti.*
*(a) Calcolare la media e la varianza del numero totale di piante di piselli gialle.*
*(b)* Stimare, utilizzando l'approssimazione normale, la probabilità che il numero totale di piante dai frutti gialli sia (strettamente) compreso tra* 120 *e* 180.
*(c)* Mendel osservò 152 piante dai frutti gialli. Calcolare la probabilità che il numero totale di piante dai piselli gialli sia* 152. *Dapprima utilizzare la distribuzione binomiale (scrivere solo la formula) e poi stimare tale probabilità utilizzando l'approssimazione normale.*
*(d)* Supponendo che la probabilità di avere frutti gialli fosse stata invece* $p = \frac{1}{2}$ *quale sarebbe stata la probabilità di osservare un numero di piante dai frutti gialli compreso tra* 120 *e* 180*?*

**Esercizio 10.** *In un'agenzia di vendite porta a porta, lavorano 5 rivenditori, di cui 2 sono esperti e 3 sono neoassunti. Ogni dipendente visita 20 clienti al giorno. Un rivenditore esperto, ogni volta che visita un cliente ha una probabilità di vendita* $p_1 = \frac{1}{20}$*, mentre questa probabilità scende a* $p_2 = \frac{1}{40}$ *per i neoassunti.*
*(a) Sia* $X$ *il numero di vendite effettuate da un rivenditore esperto in un giorno, indicare la media, la varianza e la distribuzione di* $X$.
*(b) Qual è la media e la varianza del numero di vendite effettuate dai 5 rivenditori in un giorno lavorativo? Qual è la media e la varianza del numero di vendite effettuate dai 5 rivenditori in un mese di 20 giorno lavorativi?*
*(c)* Stimare qual è la probabilità che il numero totale di vendite nel mese di Marzo (20 giorni lavorativi) superi 80.*
*(d) Se oggi è stata effettuata una sola vendita qual è la probabilità che sia stata effettuata da un neoassunto.*

**Esercizio 11.** *Nel 2008, in Veneto, sono stati celebrati 30000 matrimoni. Assumiamo che ciascun coniuge sia nato in un giorno a caso tra i 365 dell'anno (stiamo supponendo che nessuno sia nato il 29 febbraio). E supponiamo inoltre che tali eventi siano indipendenti.*
*(a) Calcolare il numero medio di coppie in cui entrambi i coniugi sono nati il 25 dicembre.*
*(b) Calcolare il numero medie di coppie che festeggiano il compleanno lo stesso giorno.*
*(c)* Stimare la probabilità che il numero di coppie che festeggia il compleanno lo stesso giorno sia superiore a 100.*

**Esercizio 12.** *Fiore e Fortunata giocano con una monetina (regolare). Fiore effettua 2 lanci e Fortunata effettua 3 lanci. Indichiamo con* $X_1$ *e* $X_2$ *il numero di croci realizzate da Fiore rispettivamente Fortunata.*
*(a) Quali sono le distribuzioni di* $X_1$ *e* $X_2$*?*
*(b) Quanto valgono* $\mathbb{E}[X_1]$, $\mathbb{E}[X_2]$ *e* $\mathbb{E}[X_1 \cdot X_2]$

*(c) Fortunata vince se realizza più croci di Fiore, mentre Fiore vince se realizza un numero di croci maggiore o uguale a quello di Fortunata. Qual è la probabilità che Fiore vinca la sfida?*
*(d) Sia n un intero maggiore di 0. Supponiamo ora che Fiore effettui n lanci (invece di 2) e Fortunata effettui $n+1$ lanci (invece di 3). Fortunata vince la sfida se realizza più croci di Fiore, mentre Fiore vince se realizza un numero di croci maggiore o uguale a quello di Fortunata. Per quali valori di n la probabilità di vincere di Fortunata è maggiore di quella di Fiore? Per quali valori di n le due probabilità sono uguali?*

**Esercizio 13.** *Ruggero e Lorenzo giocano a freccette. Supponiamo che per ogni lancio abbiano entrambi il* 60% *di probabilità di colpire il bersaglio: Ruggero ha il* 20% *di probabilità di fare 100 punti, il* 20% *di fare 50 punti e il* 20% *di fare 25 punti; mentre Lorenzo ha il* 10% *di probabilità di fare 100 punti, il* 20% *di fare 50 punti e il* 30% *di fare 25 punti. Entrambi lanciano due freccette e poi sommano i punti. Indichiamo con $X_1$, $X_2$ e $X$ (risp. $Y_1, Y_2, Y$) il risultato del primo, del secondo e della somma dei lanci effettuati da Ruggero (risp. Lorenzo).*
*(a) Qual è la probabilità che Ruggero realizzi in totale zero punti?*
*(b) Qual è la probabilità che Ruggero realizzi in totale 75 punti?*
*(c) Qual è la probabilità che Ruggero realizzi in totale 100 punti?*
*(d) Quale è la distribuzione di $X$? (Verificare che la somma delle probabilità sia effettivamente 1.)*
*(e) Quale è la distribuzione di $Y$?*

**Esercizio 14.** *Sia $X$ una variabile aleatoria binomiale di parametri $p = \frac{1}{2}$ e $n = 31$:*
*(a) Calcolare $\mathbb{E}[2X + 3]$.*
*(b) Calcolare $VAR[2X + 3]$.*
*(c)* Stimare $P(X >= 17)$.(Utilizzare l'approssimazione gaussiana con la correzione di continuità)*

**Esercizio 15.** ***Se possibile, indicare i risultati sotto forma di frazioni***
*In un sacchetto ci sono 4 monete: 3 monete regolari ed una con due teste.*
*(a) Estraggo una moneta a caso, qual è la probabilità che sia una moneta regolare?*
*(b) Estraggo due monete senza reinserimento, qual è la probabilità che siano entrambe moneta regolare?*
*(c) Estraggo due monete con reinserimento, (**Eseguo la prima estrazione, reinserisco la moneta nell'urna e poi eseguo la seconda estrazione.**) Qual è la probabilità che siano entrambe moneta regolare?*
*(d) Estraggo una moneta a caso e la lancio, qual è la probabilità che dia testa?*
*(e) Estraggo una moneta a caso e la lancio, se il risultato del lancio è testa, qual è la probabilità che sia una moneta regolare?*
*(f) Estraggo una moneta a caso e la lancio, se il risultato del lancio è croce, qual è la probabilità che sia una moneta regolare?*

*(g) Lancio tutte e quattro le monete del sacchetto qual è il numero medio di teste ottenute?*
*(h) Lancio tutte e quattro le monete del sacchetto qual è la varianza del numero di teste ottenute?*
*(i) Ripeto 100 volte la seguente procedura: estrazione di una moneta, lancio e reinserimento della moneta nel sacchetto. Qual è il numero medio e la varianza di teste ottenute nei 100 lanci.*
*(l)* Nelle ipotesi del quesito (i) qual è la probabilità che si realizzino più di 60 teste?*

# 1 Soluzioni

**Esercizio** 1 (a) Utilizzando il principio fondamentale del calcolo combinatorio si ha che le combinazioni possibili di modello, colore e cilindrata sono $5 \cdot 3 \cdot 3 = 45$.
(b) Indicando con i numeri da 1 a 45 le 45 scelte possibili e denotando con $X_1$ e $X_2$ le autovetture scelte dal primo e secondo cliente, la probabilità cercata è $P(X_1 = X_2)$.

$$P(X_1 = X_2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) + P(X_1 = 2, X_2 = 2) + \cdots + P(X_1 = 45, X_2 = 45)$$

$$P(X_1 = X_2) = \overbrace{\frac{1}{45 \cdot 45} + \frac{1}{45 \cdot 45} + \cdots + \frac{1}{45 \cdot 45}}^{45 \text{ volte}} = \frac{1}{45}$$

(c) Consideriamo l'evento $A :=$ "ci sono almeno due clienti che hanno comprato la stessa autovettura e l'evento $B := A^c =$ "tutti e 6 i clienti hanno scelto autovetture diverse". Allora si ha $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(B)$. Per calcolare $\mathbb{P}(B)$ è sufficiente calcolare il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili.
"Casi favorevoli"$= 45 \cdot 44 \cdot \ldots \cdot 40$
"Casi possibili"$= 45^6$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{45 \cdot 44 \cdot \ldots \cdot 40}{45^6}$$
$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{45 \cdot 44 \cdot \ldots \cdot 40}{45^6} \cong 0.294 = 29.4\%$$

(d) Denotiamo con $(Y_i)_{i \in \{1,2,\ldots,100\}}$ le variabili aleatorie così definite:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{l'iesima autovettura ha il climatizzatore automatico.} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora $Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{100}$ denota il numero totale di autovetture con climatizzatore automatico vendute. Il valore atteso di autovetture vendute è dato da $E[Y] = E[Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{100}] = E[Y_1] + E[Y_2] + \cdots + E[Y_{100}]$

$$E[Y_i] = P(Y_i = 1) = \frac{1}{3} \cdot 0.60 + \frac{2}{3} \cdot 0.45 = 0.5$$

dunque

$$E[Y] = E[Y_i] \cdot 100 = 0.5 \cdot 100 = 50$$

(e) Consideriamo gli eventi:
$A_1$ := "È stata scelta un'autovettura di cilindrata 2200cc"
$A_2$ := "È stata scelta un'autovettura di cilindrata 1900cc oppure 2000 cc"
$E$ := "È stato scelto il climatizzatore automatico".
Le ipotesi sono:

$$P(A_1) = \frac{1}{3} \qquad P(A_2) = \frac{2}{3} \qquad P(E|A_1) = 0.60 \qquad P(E|A_2) = 0.45$$

La tesi è calcolare

$$P(A_1|E)$$

Dalla formula di Bayes

$$P(A_1|E) = \frac{P(A_1)P(E|A_1)}{P(A_1)P(E|A_1) + P(A_2)P(E|A_2)} = \frac{2}{5} = 40\%$$

**Esercizio** 2

Sia $U$ l'evento l'assicurato è un uomo
$D$ l'evento l'assicurato è un donna
$I$ l'evento l'assicurato avrà un incidente nel prossimo anno.
Per ipotesi $P(U) = 150000/250000 = 0.60 = 60\%$,
$P(D) = 100000/250000 = 0.40 = 40\%$,
$P(I|U) = 3\% = 0.03$ e $P(I|D) = 1.5\% = 0.015$
(a) $P(I) = P(I \cap U) + P(I \cap D) = P(I|U) \cdot P(U) + P(I|D) \cdot P(D) = 0.03 \cdot 0.60 + 0.015 \cdot 0.40 = 0.024$
(b) Utilizziamo la formula di Bayes:

$$P(U|I) = \frac{P(I|U) \cdot P(U)}{P(I|U) \cdot P(U) + P(I|D) \cdot P(D)} = \frac{0.018}{0.024} = \frac{3}{4} = 75\%$$

(c) Siano $(X_i)_{i \in \{1,2,...100000\}}$ e $(Y_i)_{i \in \{1,2,...150000\}}$ le seguenti variabili:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{l'iesima donna assicurata avrà un incidente il prossimo anno} \\ 0 & \text{l'iesima donna assicurata non avrà un incidente il prossimo anno} \end{cases}$$

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{l'iesimo uomo assicurato avrà un incidente il prossimo anno} \\ 0 & \text{l'iesimo uomo assicurato non avrà un incidente il prossimo anno} \end{cases}$$

$(X_i)_{i \in \{1,2,...100000\}}$ famiglia di variabili aleatorie indipendenti bernoulliane di parametro 0.015
$(Y_i)_{i \in \{1,2,...100000\}}$ famiglia di variabili aleatorie indipendenti bernoulliane di parametro 0.03
Il numero totale di incidenti del prossimo anno sarà

$$T = \sum_{i=1}^{100000} X_i + \sum_{i=1}^{150000} Y_i$$

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{100000} X_i + \sum_{i=1}^{150000} Y_i] = \mathbb{E}[X_1+X_2+\cdots+X_{100000}] + \mathbb{E}[Y_1+Y_2+\cdots+Y_{150000}] =$$

$$= \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \cdots + \mathbb{E}[X_{100000}] + \mathbb{E}[Y_1] + \mathbb{E}[Y_2] + \cdots + \mathbb{E}[Y_{150000}] =$$

$$= \overbrace{0.015 + 0.015 + \cdots + 0.015}^{100000 \text{ volte}} + \overbrace{0.03 + 0.03 + \cdots + 0.03}^{150000 \text{ volte}} =$$

$$= 100000 \cdot 0.015 + 150000 \cdot 0.03 = 6000$$

$$\mathrm{VAR}[T] = \mathrm{VAR}[\sum_{i=1}^{100000} X_i + \sum_{i=1}^{150000} Y_i] =$$

$$= \mathrm{VAR}[X_1 + X_2 + \cdots + X_{100000}] + \mathrm{VAR}[Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{150000}] =$$

$$= \mathrm{VAR}[X_1] + \mathrm{VAR}[X_2] + \cdots + \mathrm{VAR}[X_{100000}] + \mathrm{VAR}[Y_1] + \mathrm{VAR}[Y_2] + \cdots + \mathrm{VAR}[Y_{150000}] =$$

$$= \overbrace{0.015 \cdot (1 - 0.015) + 0.015 \cdot (1 - 0.015) + \cdots + 0.015 \cdot (1 - 0.015)}^{100000 \text{ volte}} +$$

$$+ \overbrace{0.03 \cdot (1 - 0.03) + 0.03 \cdot (1 - 0.03) + \cdots + 0.03 \cdot (1 - 0.03)}^{150000 \text{ volte}} =$$

$$= 100000 \cdot 0.015 \cdot (1 - 0.015) + 150000 \cdot 0.03 \cdot (1 - 0.03) = 5842.5$$

Un altro approccio possibile per la risoluzione del punto (c) poteva essere quello di considerare le variabili aleatorie $X$ e $Y$, $X := \sum_{i=1}^{100000} X_i$ e $Y := \sum_{i=1}^{150000} Y_i$. $X$ e $Y$ sono variabili aleatorie binomiali indipendenti, la $X$ di parametri 100000 e 0.015 e la $Y$ di parametri 150000 e 0.03. Dunque $\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ e $\mathrm{VAR}[T] = \mathrm{VAR}[X] + \mathrm{VAR}[Y]$.

(d) Sia $\mu = \mathbb{E}[T] = 6000$ e sia $\sigma = \sqrt{\mathrm{VAR}[T]} = 76.436$. Approssimare $T$ con una variabile aleatoria gaussiana vuol dire scegliere una variabile aleatoria gaussiana $W$ con la stessa media e varianza di $T$ cioè $W \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \sim \mathcal{N}(6000, 5842.5)$. Utilizzando l'approssimazione di continuità la probabilità cercata diventa:

$$P(T > 6200) \approx P(W > 6200.5)$$

per ricondursi ad una normale standard si utilizza l'approccio usuale di sottrarre la media e dividere per la deviazione standard.

$$P(W > 6200.5) = P(\frac{W - \mu}{\sigma} > \frac{6200.5 - \mu}{\sigma})$$

Sia $Z := \frac{W-\mu}{\sigma}$, $Z$ è una normale standard e svolgendo i calcoli a destra risulta:

$$P(W > 6200.5) = P(Z > 2.623)$$

Dunque

$$P(W > 6200.5) = 1 - \phi(2.623) = 0.0044 = 0.44\%$$

**Esercizio** 3

(a) Vi sono in totale $n = 2500$ lampadine e ciascuna ha una probabilità $p = \frac{1}{1000}$ di fulminarsi. Denotiamo con $X$ il numero totale di lampadine fulminate nella notte. $X$ ha una distribuzione Binomiale di parametri $n = 2500$ e $p = \frac{1}{1000}$ dunque

$$P(X = 0) = \binom{n}{0}(1-p)^n p^0 = (0.999)^{2500} \simeq 0.082$$

Una altra possibile risoluzione del quesito (a). La probabilità di una lampadina di non fulminarsi è $1 - p = 0.999$ dunque per l'indipendenza la probabilità per 2500 lampadine di non fulminarsi durante la notte è:

$$\overbrace{0.999 \cdot 0.999 \cdot \ldots \cdot 0.999}^{2500 \text{ volte}} = 0.999^{2500} \simeq 0.082$$

(b) Tutte le lampadine hanno uguale probabilità di fulminarsi, nel centro storico vi sono 1000 lampadine su un totale di 2500. Possiamo calcolare la probabilità cercata come rapporto tra casi FAVOREVOLI e casi POSSIBILI.

$$P(\text{La lampadina fulminata è nel centro storico}) = \frac{1000}{2500} = 0.4 = 40\%$$

(c) Indichiamo con $Y$ il numero di lampadine fulminate in un anno. Sia $X_{i,j}$ con $i \in \{1, 2, \ldots, 2500\}$ e $j \in \{1, 2, \ldots, 365\}$ una variabile bernoulliana con:

$$X_{i,j} =$$

$$X_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{Se la } i\text{-esima lampadina il giorno } j\text{-esimo si è fulminata} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora $Y = \sum_{i,j} X_{i,j}$, $Y$ è somma di $2500 \cdot 365$ variabili bernoulliane di paramentro $p = \frac{1}{1000}$. Dunque $Y$ è una variabile aleatoria binomiale di parametri $p = \frac{1}{1000}$ e $N = 2500 \cdot 365 = 912500$.

$$\mathbb{E}[Y] = Np = 912.5$$

$$\text{VAR}[Y] = Np(1-p) \simeq 911.59$$

(d) Approssiamo $Y$ con una variabile aleatoria normale $W$ con media e varianza uguali a media e varianza di $Y$.

$$W \sim \mathcal{N}(912.5, 911.6)$$

applicando la correzione di continuità si ha

$$P(Y \leq 950) \simeq P(W < 950.5) = P\left(\frac{W - 912.5}{30.19} < \frac{950.5 - 912.5}{30.19}\right)$$

Sia $Z = \frac{W - 912.5}{30.19}$ dunque $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

$$P(W < 950.5) = P(Z < 1.26) = \Phi(1.26) = 0.89617$$

**Esercizio** 4

(a) Sia $n = 70$ il numero degli studenti e sia $p = 0.01$ la probabilità che uno studente vada a ricevimento un certo giorno. Fissato un giorno di ricevimento, sia $X$ la variabile aleatoria che indica il numero totale di studenti presenti al ricevimento. Siano $Y_1, \ldots, Y_{70}$ le variabili aleatorie a valori in $\{0, 1\}$ così definite:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{Se l'}i\text{-esimo studente è andato a ricevimento} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

allora $Y_i$ sono 70 v.a. indipendenti Bernoulliane di parametro $p = 0.01$ e $X = \sum_{i=1}^{70} Y_i$ ha distribuzione binomiale $X \sim Bin(n = 70, p = 0.01)$ e la sua media è data da $\mathbb{E}[X] = np = 0.7$.

(b) La probabilà cercata è

$$P(X = 0) = \binom{70}{0}^0 \cdot p \cdot (1 - p)^{70} = (0.99)^{70} \simeq 0.4948$$

Se avessimo deciso di stimare $P(X = 0)$ approssimando la $X$ con una v.a. $Y$ di Poisson avremmo avuto $Y \sim Poisson(0.7)$ e
$P(Y = 0) = e^{-0.7} \cdot \frac{0.7^0}{0!} \simeq 0.4965$.

(c) La probabilità che ad un fissato ricevimento non si presenti nessuno è $p_2 = 0.4948$ (calcolata nel punto (b)). Poiché vi sono in tutto 50 ricevimenti allora la v.a. $T$ ha distribuzione binomiale $T \sim Bin(50, 0.4948)$.

$$\mathbb{E}[T] = 50 \cdot p_2 \simeq 24.74$$

$$Var[T] = 50 \cdot p_2 \cdot (1 - p_2) \simeq 12.50$$

(d) Sia $\mu = E[T]$ e sia $\sigma^2 = Var[T]$. Sia $W$ una variabile aletoria normale di media $\mu$ e varianza $\sigma^2$. Utilizzando la correzione di continuità possiamo stimare la probabilità cercata $P(T \geq 30)$ con $P(W > 29.5)$.

$$P(W > 29.5) = 1 - P(W < 29.5) = 1 - P\left(\frac{W - \mu}{\sigma} < \frac{29.5 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= 1 - \phi\left(\frac{29.5 - \mu}{\sigma}\right) \simeq 1 - \phi(1.35) \simeq 0.09$$

**Esercizio** 5

(a) Indichiamo con $X$ il numero di bibete vendute, $X$ è una variabile di Poisson di parametro 0.5 dunque ha distribuzione:

$$P(X = k) = \frac{0.5^k}{k!} e^{-0.5} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Dunque per $k = 1$ si ha:

$$P(X = 1) = \frac{0.5}{1} e^{-0.5} \simeq 0.303$$

(b) Siano $X_1, X_2, \ldots, X_6$ le variabili aleatorie che indicano le bibite vendute nei sei giorni lavorativi della settimana, sia $X_s := X_1 + X_2 + \ldots + X_6$ il numero di bibite vendute in una settimana di sei giorni lavorativi. Poiché $X_s$ è somma di variabili di Poisson indipendenti allora anche $X_s$ sarà di Poisson e la sua media sarà la somma delle medie cioè $X_s \sim Poisson(3)$. Dove $3 = 6 \cdot 0.5$.

$$P(X_s \geq 3) = 1 - P(X_s < 3) = 1 - (P(X_s = 0) + P(X_s = 1) + P(X_s = 2)) =$$

$$= 1 - \left(\frac{3^0}{0!}e^{-3} + \frac{3^1}{1!}e^{-3} + \frac{3^2}{2!}e^{-3}\right) = 1 - \frac{17}{2}e^{-3} \simeq 0.5768 = 57.68\%$$

(c) Denotiamo con $Y_1, Y_2, \ldots Y_{255}$ il numero di bibite vendute nei 255 giorni di apertura della pizzeria e sia $Y := Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{255}$ il numero di pizze vendute in un anno.
Metodo di risoluzione 1: $\mathbb{E}[Y_i] = 40$, $VAR[Y_i] = 40$ e dunque per l'indipendenza delle $Y_i$ si ha $\mathbb{E}[Y] = 255 * 40 = 10200$ e $VAR[Y] = 255 \cdot VAR[Y_i] = 10200$.
Metodo di risoluzione 2: poiché $Y$ è somma di variabili aleatorie di Poisson indipendenti si ha $Y \sim Poisson(255 * 40 = 10200)$ e dunque $\mathbb{E}[Y] = 10200$ e $VAR[Y] = 10200$.
(d) Denotiamo ancora con $Y$ le pizze vendute in un anno di 255 giorni lavoratori e con $Z := Y \cdot 0.50$ i soldi in euro messi da parte. Il problema si riduce a stimare la probabilità che $Y > 10000$ oppure che $Z > 5000$. Dal punto (c) sappiamo che $\mathbb{E}[Y] = 10200$ e $VAR[Y] = 10200$.

Metodo 1: Per stimare $P(Y > 10000)$ possiamo approssimare $Y$ con una variabile aleatoria gaussiana $T$ di media $\mu = 10200$ e varianza $\sigma^2 = 10200$. Allora utilizzando la correzione di continuità si ha:

$$P(Y > 10000) \simeq P(T > 10000.5) = 1 - P(T \leq 10000.5) =$$

$$= 1 - \phi\left(\frac{10000.5 - \mu}{\sigma}\right) \simeq 1 - \phi(-1.98) = \phi(1.98) \simeq 97.6\%$$

Metodo 2: Supponiamo invece di voler stimare $P(Z > 5000)$, allora prima di tutto dobbiamo calcolare speranza e varianza di $Z$. Poiché $Z = Y \cdot 0.5$ si ha $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[Y] \cdot 0.5 = 5100$ e

$$VAR[Z] = VAR[Y] \cdot (0.5)^2 = 2550.$$

(La variabile aleatoria $Z$ non è di Poisson!). La variabile aleatoria $Z$ non è a valori interi quindi non è possibile applicare la correzione di continuità. Senza usare la correzione di continuità si ottiene il seguente risultato:

$$P(Z > 5000) \simeq P(S > 5000) = 1 - P(S \leq 5000) =$$

$$= 1 - \phi\left(\frac{5000 - 5100}{\sqrt{2550}}\right) \simeq 1 - \phi(-1.98) = \phi(1.98) \simeq 97.6\%$$

**Esercizio** 6

(a) 3.9

(b) 2%

(c) circa $2 \cdot 10^{-6}$ ovvero $\frac{1}{500000}$

(d) 15500, 15452

(e) 0.0016

**Esercizio** 7

(a) 2400, 2368.76

(b) $\frac{5}{6}$

(c) $1 - \phi(2.06) = 0.0197$

(d) 24000, 23687.6, $1 - \phi(6.5) \simeq 0$

**Esercizio** 8

(a) 0.22%

(b) $\frac{13}{22}$

(c) 132, 131.7

(d) $1 - \phi(1.61) = 0.0537$

**Esercizio** 9

(a) 145, 108.75

(b) $\phi(3.31) - \phi(-2.35) = 0.99014$

(c) $\binom{580}{152} \cdot (\frac{1}{4})^{152} \cdot (\frac{3}{4})^{428}$, $\phi(0.72) - \phi(0.62) = 0.03187$

(d) $\phi(-9.18) - \phi(-14.08) \simeq 0$

**Esercizio** 10

(a) 1, $\frac{19}{20}$, $\mathrm{Bin}(20, \frac{1}{20})$

(b) 3.5 $\frac{269}{80}$, 70, $\frac{269}{4}$

(c) $1 - \phi(1.28) = 0.10027$

(d) $\frac{19}{45}$