

Esercitazione del 18/05/2018

Istituzioni di Calcolo delle Probabilità

David Barbato
barbato@math.unipd.it

Esercizio 1. *E' la notte di San Lorenzo, Alessandra decide di andare a vedere le stelle cadenti. Osserverà il cielo finché non vedrà 3 stelle cadenti. Sia X il tempo che intercorre tra l'inizio della sua osservazione e l'istante in cui vede la terza stella cadente. Qual è la distribuzione più adatta per la v.a. X ? Perché? (Supporre che $\frac{1}{\lambda}$ sia il tempo medio necessario per vedere la prima stella cadente.)*

Vettori aleatori discreti.

Sia (X, Y) una vettore aleatorio discreto, con densità f allora X e Y sono v.a. discrete e la loro distribuzione è data da:

$$P(Y = y) = \sum_{x|f(x,y)>0} f(x, y) \quad \text{e} \quad P(X = x) = \sum_{y|f(x,y)>0} f(x, y) \quad (1)$$

Esercizio 2. *Sia (X, Y) un vettore aleatorio discreto con densità f data da:*

$$f(m, n) = \left(\frac{2}{2 + 3^m} \right)^n \quad \forall n, m \text{ interi e positivi}$$

(cioè $P(X = m, Y = n) = \left(\frac{2}{2 + 3^m} \right)^n$).

(a) Calcolare la distribuzione di X .

(b) A quale distribuzione appartiene X ? (Indicare gli eventuali parametri.)

Soluzione: (a) $P(X = m) = \frac{2}{3^m}$ per ogni m intero e positivo. (b) La v.a. X è una v.a. geometrica di parametro $\frac{2}{3}$.

Vettori aleatori continui.

Esercizio 3. *Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità:*

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \alpha(e^x + e^{x+y}) & \text{se } -1 < x < 1, 0 < y < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (a) Calcolare α .
- (b) Calcolare la funzione di ripartizione e la densità delle variabili marginali X e Y .
- (c) Calcolare $\mathbb{E}[e^{-X}]$.
- (d) X e Y sono indipendenti?

Esercizio 4. Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità:

$$f_{(X,Y)}(x, y) \begin{cases} \alpha(e^x + e^{-y}) & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

Dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, -1 < y < 0\}$

- (a) Calcolare α .
- (b) Calcolare la funzione di ripartizione e la densità delle variabili marginali X e Y .
- (c) Calcolare $\mathbb{P}(X + Y < 0)$.
- (d) Calcolare $\mathbb{E}[e^Y]$.

Esercizio 5. Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità continua $f_{(X,Y)}$:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{\sin(x)}{y^2} + \frac{2\cos(x)}{y^3}\right) & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

Dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \frac{\pi}{2}, y > 1\}$.

- (a) Calcolare α .
- (b) Calcolare le funzioni di ripartizione e le densità delle variabili marginali X e Y .
- (c) X e Y sono indipendenti?
- (d) Calcolare $P(X < 1)$ e $P(X < 1 | Y < 2)$.

Esercizio 6. Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{1}{x^2y} + \frac{1}{x^3y^2}\right) & \text{se } 1 < x < 2, 1 < y < 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (a) Calcolare α .
- (b) Calcolare la funzione di ripartizione e la densità delle variabili marginali X e Y .
- (c) Calcolare $\mathbb{E}[XY]$.
- (d) Calcolare la covarianza $\text{cov}(X, Y)$.

Esercizio 7. Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità continua $f_{(X,Y)}$:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \alpha \left(\frac{e^{-y}}{x^2} \right) & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

Dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, y > 1\}$.

(a) Calcolare α .

(b) Calcolare la funzione di ripartizione e la densità delle variabili marginali X e Y .

(c) Calcolare $\mathbb{E}\left[\frac{e^Y}{Y^2 X^2} + 1\right]$.

(d) Le variabili X e Y sono indipendenti? Quanto vale la covarianza $\text{cov}[X, Y]$?

Soluzioni

Esercizio 3

(a) Si può calcolare α risolvendo l'uguaglianza

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x, y) \, dx dy &= 1 \\ \iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x, y) \, dx dy &= \int_{-1}^1 \int_0^2 \alpha(e^x + e^{x+y}) \, dy dx = \\ &= \alpha \int_{-1}^1 \int_0^2 e^x(1 + e^y) \, dy dx = \alpha \int_{-1}^1 |e^x(y + e^y)|_{y=0}^{y=2} dx = \\ &= \alpha \int_{-1}^1 2e^x + e^x e^2 - e^x e^0 dx = \alpha \int_{-1}^1 e^x(e^2 + 1) dx = \\ &= \alpha |e^x(e^2 + 1)|_{x=-1}^{x=1} = \alpha(e - e^{-1})(e^2 + 1) \end{aligned}$$

Quindi si ha $\alpha = \frac{1}{(e - e^{-1})(e^2 + 1)}$.

(b) Denotiamo con f_X e f_Y le densità di X e Y e con F_X e F_Y le rispettive funzioni di ripartizione.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y) \, dy$$

Per $x \notin (-1, 1)$ si ha $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y) \, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \, dy = 0$

Per $x \in (-1, 1)$ invece

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y) \, dy = \int_0^2 \alpha \cdot e^x(1 + e^y) \, dy =$$

$$= \alpha |e^x(y + e^y)|_{y=0}^{y=2} = \alpha \cdot e^x (2 + e^2 - 1) = \frac{e^x (e^2 + 1)}{(e - e^{-1})(e^2 + 1)} = \frac{e^x}{e - e^{-1}}$$

Dunque

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (-1, 1) \\ \frac{e^x}{e - e^{-1}} & x \in (-1, 1) \end{cases}$$

si procede in maniera analoga per f_Y ,

Per $y \notin (0, 2)$ si ha $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 dx = 0$

Per $y \in (0, 2)$ invece

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y) dx = \int_{-1}^1 \alpha \cdot e^x (1 + e^y) dx = \\ &= \alpha |e^x(1 + e^y)|_{x=-1}^{x=1} = \alpha \cdot (e^1 - e^{-1}) (1 + e^y) = \frac{(1 + e^y)(e - e^{-1})}{(e - e^{-1})(e^2 + 1)} = \frac{1 + e^y}{e^2 + 1} \end{aligned}$$

Dunque

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \notin (0, 2) \\ \frac{1+e^y}{e^2+1} & y \in (0, 2) \end{cases}$$

Per calcolare le funzioni di ripartizioni possiamo integrare f_X e f_Y .

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(s) ds$$

Per $x \leq -1$ si ha $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(s) ds = \int_{-\infty}^x 0 ds = 0$

Per $x \geq 1$ si ha $F_X(x) = P(X \leq x) = 1$

Per $-1 < x < 1$ invece

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(s) ds = \int_{-1}^x \frac{e^s}{e - e^{-1}} ds = \frac{e^x - e^{-1}}{e - e^{-1}}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ \frac{e^x - e^{-1}}{e - e^{-1}} & -1 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

si procede in maniera analoga per F_Y ottenendo:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \frac{y+e^y-1}{1+e^2} & 0 < y < 2 \\ 1 & y \geq 2 \end{cases}$$

(c)

$$\mathbb{E}[e^{-X}] = \int e^{-x} f_X(x) dx = \int_{-1}^1 e^{-x} \frac{e^x}{e - e^{-1}} dx = \frac{2}{e - e^{-1}}$$

(d) X e Y sono indipendenti, basta verificare che $f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ per ogni x e y .

Esercizio 4

(a) Si può calcolare α risolvendo l'uguaglianza

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y) \, dx dy &= 1 \\ \iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y) \, dy dx &= \iint_D \alpha(e^x + e^{-y}) dy dx = \alpha \cdot \int_0^1 \int_{-1}^0 e^x + e^{-y} \, dy dx = \\ &= \alpha \cdot \int_0^1 [ye^x - e^{-y}]_{y=-1}^{y=0} \, dx = \alpha \cdot \int_0^1 -e^0 + e^x + e^1 \, dx = \\ &= \alpha \cdot [x(e-1) + e^x]_0^1 = \alpha(e-1+e-e^0) = 2 \cdot \alpha(e-1) \end{aligned}$$

Quindi si ha $\alpha = \frac{1}{2(e-1)}$.

(b) Denotiamo con f_X e f_Y le densità di X e Y e con F_X e F_Y le rispettive funzioni di ripartizione.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y) \, dy$$

Per $x \notin (0,1)$ si ha $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y) \, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \, dy = 0$
 Per $x \in (0,1)$ invece

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y) \, dy = \int_{-1}^0 \alpha(e^x + e^{-y}) \, dy = \\ &= \alpha [ye^x - e^{-y}]_{y=-1}^{y=0} = \alpha (-e^0 + e^x + e) \end{aligned}$$

Dunque

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (0,1) \\ \alpha(e^x + e - 1) & x \in (0,1) \end{cases}$$

Si procede in maniera analoga per f_Y

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y) \, dx$$

Per $y \notin (-1,0)$ si ha $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \, dx = 0$
 Per $y \in (-1,0)$ invece

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y) \, dx = \int_0^1 \alpha(e^x + e^{-y}) \, dx = \\ &= \alpha [e^x + xe^{-y}]_{x=0}^{x=1} = \alpha (-e^0 + e^{-y} + e) \end{aligned}$$

Dunque

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \notin (-1, 0) \\ \alpha(e^{-y} + e - 1) & y \in (-1, 0) \end{cases}$$

Per calcolare le funzioni di ripartizioni possiamo integrare f_X e f_Y .

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(s) ds$$

Per $x \leq 0$ si ha $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(s) ds = \int_{-\infty}^x 0 ds = 0$

Per $x \geq 1$ si ha $F_X(x) = P(X \leq x) = 1$

Per $0 < x < 1$ invece

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(s) ds = \int_0^x \alpha(e^s + e - 1) ds = \\ &= \alpha [e^s + s(e - 1)]_{s=0}^{s=x} = \alpha(x(e - 1) + e^x - 1) \end{aligned}$$

Dunque

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \alpha(x(e - 1) + e^x - 1) & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

si procede in maniera analogo per F_Y ottenendo:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq -1 \\ \alpha(y(e - 1) - e^{-y} + 2e - 1) & -1 < y < 0 \\ 1 & y \geq 0 \end{cases}$$

(c) Denotiamo con C l'insieme dei punti (x, y) di D tali che $x + y < 0$. Allora si ha:

$$P(X + Y < 0) = \iint_C f_{(X,Y)}(x, y) dydx$$

Al variare di x tra 0 e 1 la disuguaglianza $x + y < 0$ ci dà $y < -x$. Dunque

$$\begin{aligned} P(X + Y < 0) &= \alpha \cdot \int_0^1 \int_{-1}^{-x} e^x + e^{-y} dydx = \\ &= \alpha \cdot \int_0^1 [ye^x - e^{-y}]_{y=-1}^{y=-x} dx = \alpha \cdot \int_0^1 -xe^x - e^x + e^x + e^1 dx = \\ &= \alpha \cdot [-xe^x + e^x + xe]_0^1 = \alpha(-e + e + e - e^0) = \alpha(e - 1) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(d) Si può calcolare $\mathbb{E}[e^Y]$ risolvendo:

$$\mathbb{E}[e^Y] = \iint_{\mathbb{R}^2} e^y \cdot f_{(X,Y)}(x, y) \, dy dx$$

oppure poiché e^Y dipende solo da Y risolvendo

$$\mathbb{E}[e^Y] = \int_{\mathbb{R}} e^y \cdot f_Y(y) \, dy$$

Illustriamo la risoluzione del primo integrale (il più difficile).

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^Y] &= \iint_D e^y \cdot \alpha(e^x + e^{-y}) \, dy dx = \alpha \cdot \int_0^1 \int_{-1}^0 e^{x+y} + 1 \, dy dx = \\ &= \alpha \cdot \int_0^1 [e^{x+y} + y]_{y=-1}^{y=0} \, dx = \alpha \cdot \int_0^1 e^x - e^{x-1} + 1 \, dx = \\ &= \alpha \cdot [e^x - e^{x-1} + x]_0^1 = \alpha(e - e^0 + 1 - e^0 + e^{-1}) = \frac{e + e^{-1} - 1}{2(e - 1)} \end{aligned}$$

Esercizio 5

(a) Per calcolare α bisogna imporre $f_{(X,Y)} \geq 0$ e $\iint f_{(X,Y)} dx dy = 1$.
Per $(x, y) \in D$ si ha: $\sin(x) > 0$, $\cos(x) > 0$, $Y^2 > 0$ e $Y^3 > 0$ dunque per soddisfare la prima condizione sarà sufficiente imporre $\alpha \geq 0$. Calcoliamo ora l'integrale $\iint f_{(X,Y)} dx dy$.

$$\begin{aligned} \iint f_{(X,Y)} dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{+\infty} \alpha \left(\frac{\sin(x)}{y^2} + \frac{2\cos(x)}{y^3} \right) dy dx = \\ &= \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin(x)}{(-1)y} + \frac{2\cos(x)}{(-2)y^2} \right]_{y=1}^{y=+\infty} dx = \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x) + \cos(x)) dx = \\ &= \alpha [-\cos(x) + \sin(x)]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \alpha(-\cos(\frac{\pi}{2}) + \cos(0) + \sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(0)) = \\ &= \alpha(-0 + 1 + 1 - 0) = 2\alpha \end{aligned}$$

Dunque

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

(b) $f_X(x) = \int f_{(X,Y)}(x, y) dy$

Se $x \notin (0, \frac{\pi}{2})$ allora $f_X(x) = \int 0dy = 0$

Consideriamo il caso $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ allora:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int f_{(X,Y)} dy = \int_1^{+\infty} \alpha \left(\frac{\text{sen}(x)}{y^2} + \frac{2\cos(x)}{y^3} \right) dy = \\ &= \alpha \left[\frac{\text{sen}(x)}{(-1)y} + \frac{2\cos(x)}{(-2)y^2} \right]_{y=1}^{y=+\infty} = \alpha (\text{sen}(x) + \cos(x)) = \end{aligned}$$

Dunque

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha(\text{sen}(x) + \cos(x)) & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & x \notin (0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int f_{(X,Y)}(x, y) dx$$

Se $y \leq 1$ allora $f_Y(y) = \int 0dx = 0$

Consideriamo il caso $y > 1$ allora:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int f_{(X,Y)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha \left(\frac{\text{sen}(x)}{y^2} + \frac{2\cos(x)}{y^3} \right) dx = \\ &= \alpha \left[\frac{-\cos(x)}{y^2} + \frac{2\text{sen}(x)}{y^3} \right]_{x=0}^{\frac{x=\pi}{2}} = \\ &= \alpha \left(\frac{-\cos(\frac{\pi}{2})}{y^2} + \frac{2\text{sen}(\frac{\pi}{2})}{y^3} - \frac{-\cos(0)}{y^2} - \frac{2\text{sen}(0)}{y^3} \right) = \\ &= \alpha \left(\frac{1}{y^2} + \frac{2}{y^3} \right) = \end{aligned}$$

Dunque

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ \alpha \left(\frac{1}{y^2} + \frac{2}{y^3} \right) & y > 1 \end{cases}$$

$$F_X(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f_X(x) dx$$

Se $a \leq 0$ allora $F_X(a) = \int_{-\infty}^a 0dx = 0$

Se $a \geq \frac{\pi}{2}$ allora $F_X(a) = P(X \leq a) = 1$.

Consideriamo il caso $a \in (0, \frac{\pi}{2})$ allora:

$$\begin{aligned} F_X(a) &= \int_{-\infty}^a f_X(x) dx = \int_0^a \alpha(\text{sen}(x) + \cos(x)) dx = \\ &= \alpha [-\cos(x) + \text{sen}(x)]_0^a = \alpha(-\cos(a) + \text{sen}(a) + \cos(0) - \text{sen}(0)) = \\ &= \alpha(1 - \cos(a) + \text{sen}(a)) \end{aligned}$$

Dunque

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & a \leq 0 \\ \alpha(1 - \cos(a) + \sin(a)) & a \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 1 & a \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$F_Y(b) = P(Y \leq b) = \int_{-\infty}^b f_Y(y) dy$$

Se $b \leq 1$ allora $F_Y(b) = \int_{-\infty}^b 0 dy = 0$

Consideriamo il caso $b > 1$ allora:

$$\begin{aligned} F_Y(b) &= \int_{-\infty}^b f_Y(y) dy = \int_1^b \alpha \left(\frac{1}{y^2} + \frac{2}{y^3} \right) dy = \alpha \left[\frac{1}{-y} + \frac{2}{(-2)y^2} \right]_1^b dy = \\ &= \alpha \left(\frac{1}{-b} + \frac{2}{(-2)b^2} - \frac{1}{-1} - \frac{2}{(-2)1^2} \right) = \alpha \left(2 - \frac{1}{b} - \frac{1}{b^2} \right) = \end{aligned}$$

Dunque

$$F_Y(b) = \begin{cases} 0 & b \leq 1 \\ \alpha \left(2 - \frac{1}{b} - \frac{1}{b^2} \right) & b > 1 \end{cases}$$

(c) Le variabili aleatorie X e Y non sono indipendenti perché la funzione $f_X \cdot f_Y$ è diversa da $f_{(X,Y)}$.

(d) Prima di tutto $\sin(1)$ e $\cos(1)$ devono essere calcolati in radianti quindi:

$$\sin(1) = 0.841 \quad \cos(1) = 0.54$$

Poiché la v.a. X è assolutamente continua si ha:

$$P(X < 1) = P(X \leq 1) = F_X(1) = \alpha(1 - \cos(1) + \sin(1)) \simeq 0.65$$

$$P(X < 1 | Y < 2) = \frac{P(X < 1, Y < 2)}{P(Y < 2)}$$

$$P(Y < 2) = P(Y \leq 2) = F_Y(2) = \alpha \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{8} = 0.625$$

$$\begin{aligned} P(X < 1, Y < 2) &= \int_0^1 \int_1^2 \alpha \left(\frac{\sin(x)}{y^2} + \frac{2\cos(x)}{y^3} \right) dy dx = \\ &= \int_0^1 \alpha \left[\frac{\sin(x)}{-y} + \frac{2\cos(x)}{(-2)y^2} \right]_{y=1}^{y=2} dx = \\ &= \int_0^1 \alpha \left(\frac{\sin(x)}{-2} + \frac{2\cos(x)}{(-2)2^2} - \frac{\sin(x)}{-1} - \frac{2\cos(x)}{(-2)1^2} \right) dx = \\ &= \alpha \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\sin(x) + \frac{3}{4}\cos(x) \right) dx = \alpha \left[-\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{3}{4}\sin(x) \right]_0^1 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \left(-\frac{1}{2} \cos(1) + \frac{3}{4} \sin(1) + \frac{1}{2} \cos(0) - \frac{3}{4} \sin(0) \right) = \\
&= \frac{1}{8} (2 - 2 \cdot \cos(1) + 3 \cdot \sin(1)) \simeq 0.43 \\
P(X < 1 | Y < 2) &= \frac{0.43}{0.625} = 0.688
\end{aligned}$$

Esercizio 6

(a) $\alpha = \frac{4}{2 \log(3)+1} \simeq 1.251$

(b)
$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \begin{cases} 0 & x \notin (1, 2) \\ \alpha \left(\frac{\log(3)}{x^2} + \frac{2}{3x^3} \right) & x \in (1, 2) \end{cases} \\
f_Y(y) &= \begin{cases} 0 & y \notin (1, 3) \\ \alpha \left(\frac{1}{2y} + \frac{3}{8y^2} \right) & y \in (1, 3) \end{cases}
\end{aligned}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \alpha \left(\log(3) + \frac{1}{3} - \frac{\log(3)}{x} - \frac{1}{3x^2} \right) & 1 < x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ \alpha \left(\frac{3}{8} + \frac{\log(y)}{2} - \frac{3}{8y} \right) & 1 < y < 3 \\ 1 & y \geq 3 \end{cases}$$

(c) $\mathbb{E}[XY] = \alpha \left(2 \log(2) + \frac{\log(3)}{2} \right) \simeq 2.4216$

(d) $\text{cov}(X, Y) \simeq 0.00196$

Esercizio 7

(a) $\alpha = e$

(b)
$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & x > 1 \end{cases} & f_Y(y) &= \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ e^{1-y} & y > 1 \end{cases} \\
F_X(x) &= \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & x > 1 \end{cases} & F_Y(y) &= \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ 1 - e^{1-y} & y > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

(c) $1 + \frac{e}{3}$

(d) X e Y sono indipendenti. $\text{cov}[X, Y] = 0$