Esercitazione del 30/05/2018
Istituzioni di Calcolo delle Probabilità

David Barbato
barbato@math.unipd.it

Distribuzione di una funzione di v.a. continua.

Esercizio 1. *Sia* $X \sim Esp(3)$ *e sia* $Y = 7 - 2X$*. Calcolare la funzione di densità* f_Y*.* *(`Utilizzare il teorema 7.1 del paragrafo 5.7 del libro di testo`)*

Esercizio 2. *Sia* $X \sim Unif(1, 2)$ *e sia* $Y = X^2$*. Calcolare la funzione di densità* f_Y*.*

Esercizio 3. *Sia* $X \sim Unif(0, 1)$ *e sia* $Y = e^X$*. Calcolare la funzione di densità* f_Y*.*

Funzione generatrice dei momenti.

Esercizio 4. *Sia* $X \sim Unif(a, b)$*. Calcolare la funzione generatrice dei momenti di* X*.*

Esercizio 5. *Siano* X *e* Y *due variabili aleatorie indipendenti con distribuzione* $X \sim Unif(0, 1)$ *e* $Y \sim Esp(\lambda)$ *con* $\lambda > 0$*. Sia infine* $W = X - Y$*. Calcolare la funzione generatrice dei momenti di* W*.*

Esercizio 6. *Sia* X *variabile aleatoria continua con densità* $f_X(x) = \frac{\alpha}{(1+|x|)^2}$ *Calcolare la costante di normalizzazione* α*. Quanto vale la funzione generatrice dei momenti di* X*?*

Valore atteso condizionato.
Sia (X, Y) un vettore aleatorio discreto. Sia $p_{(X,Y)}$ la sua densità discreta e $p_{X|Y}$ la densità discreta condizionata.

$$p_{(X,Y)}(x, y) := P(X = x, Y = y) \qquad \sum_{x,y} p_{(X,Y)}(x, y) = 1$$

$$p_{(X|Y)}(x|y) := P(X = x|Y = y) = \frac{p_{(X,Y)}(x, y)}{p_Y(y)}$$

Ricordiamo che se y è tale che $p_Y(y) > 0$ allora $p_{(X|Y)}(\cdot|y)$ definisce una misura di probabilità per cui $\sum_x p_{(X|Y)}(x|y) = 1$. Poiché $p_{(X|Y)}(\cdot|y)$ definisce una misura di probabilità (sempre nel caso $p_Y(y) > 0$) allora ha senso parlare di valore atteso rispetto a questa misura, tale valore atteso sarà detto valore atteso di X condizionato a $Y = y$ e scriveremo $\mathbb{E}[X|Y = y]$

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = \sum_x x p_{(X|Y)}(x|y)$$

Se X e Y sono indipendenti allora si ha $p_{(X|Y)}(x|y) = p_{(X)}(x)$ e dunque vale la seguente

Proposition 0.1. *Se (X, Y) è un vettore aleatorio e X è indipendente da Y allora*

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = \mathbb{E}[X]$$

Una relazione importante che riguarda il valore atteso condizionato è la seguente:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|Y]\right]$$

Che cosa è $\mathbb{E}[X|Y]$? E' importante sottolineare il fatto che $\mathbb{E}[X|Y]$ in questo caso è una variabile aleatoria, essa è definita nel modo seguente:

$$\mathbb{E}[X|Y] = \begin{cases} \mathbb{E}[X|Y = y_1] & \text{se } Y = y_1 \\ \mathbb{E}[X|Y = y_2] & \text{se } Y = y_2 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Esercizio 7. *Sia $T_1 \sim Geo(\frac{1}{3})$, sia $T_2 \sim Geo(\frac{1}{5})$ e sia $Y \sim Bern(\frac{1}{4})$. Supponiamo inoltre che Y sia indipendente da T_1 e T_2.*
Sia $X := \begin{cases} T_1 & se\ Y = 0 \\ T_2 & se\ Y \neq 0 \end{cases}$.
Calcolare $\mathbb{E}[X]$.
Soluzione. $\frac{7}{2}$

Esercizio 8. *Siano $T_1, \dots T_n$ una n-upla di v.a. binomiali con distribuzione $T_k \sim Bin(p, k)$ con $p \in (0, 1)$. Sia Y una v.a. indipendente dalle T_i con distribuzione $Y \sim Unif\{1, 2, \dots, n\}$. Sia infine $X := \begin{cases} T_1 & se\ Y = 1 \\ T_2 & se\ Y = 2 \\ \dots & \dots \\ T_n & se\ Y = n \end{cases}$.*
(a) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.
(b) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.
Soluzione. (a) $\frac{n+1}{2}$, *(b)* $\frac{n+1}{2}p$

Esercizio 8 bis.
Viene lanciato un dado regolare a sei facce, sia Y il risultato del lancio. Dopo aver lanciato il dado vengono lanciate Y monete regolari, sia X il numero di teste ottenute.
(a) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.
(b) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.
Soluzione. Ricondursi all'esercizio precedente con $n = 6$ e $p = \frac{1}{2}$

Soluzioni

Esercizio 1

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}(7-y)} & y < 7 \\ 0 & y \geq 7 \end{cases}$$

Esercizio 2

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} & y \in (1,4) \\ 0 & y \notin (1,4) \end{cases}$$

Esercizio 3

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & y \in (1,e) \\ 0 & y \notin (1,e) \end{cases}$$

Esercizio 4

$$M_X(t) = \begin{cases} \frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

Esercizio 5

$$M_W(t) = \begin{cases} \frac{e^t-1}{t} \cdot \frac{\lambda}{\lambda+t} & t > -\lambda \ , \ t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

La funzione generatrice dei momenti non è definita per $t \leq -\lambda$

Esercizio 6
Innanzitutto occorre scrivere la densità f_X in maniera esplicita senza il modulo.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{(1-x)^2} & x < 0 \\ \frac{\alpha}{(1+x)^2} & x \geq 0 \end{cases}$$

A questo punto si esegue l'integrale spezzandolo

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{0} f_X(x)\mathrm{dx} + \int_{0}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{dx}$$

il risultato finale che si ottiene ponendo l'integrale uguale ad 1 è $\alpha = \frac{1}{2}$.
Per calcolare la funzione generatrice dei momenti si applica la definizione

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} f_X(x)\mathrm{dx}$$

Se $t = 0$ si ha chiaramente $M_X(0) = 1$ altrimenti se $t \neq 0$ si spezza l'integrale,

$$\mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{0} e^{tx} f_X(x)\mathrm{dx} + \int_{0}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\mathrm{dx}$$

$$\mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{0} \frac{\alpha e^{tx}}{(1-x)^2}\mathrm{dx} + \int_{0}^{+\infty} \frac{\alpha e^{tx}}{(1+x)^2}\mathrm{dx}$$

ci sono due casi $t < 0$ e $t > 0$. Se $t < 0$ allora

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\alpha e^{tx}}{(1-x)^2} = +\infty$$

e dunque il primo integrale dà $+\infty$ e si ha $\mathbb{E}[e^{tX}] = \infty$ se invece $t > 0$ allora

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\alpha e^{tx}}{(1+x)^2} = +\infty$$

e dunque il secondo integrale dà $+\infty$ e si ha ancora $\mathbb{E}[e^{tX}] = \infty$.
In conclusione la funzione generatrice dei momenti è definita solo per $t = 0$ e si ha $M_X(0) = 1$.