

Prova d'esame di
Matematica con Elementi di Statistica
Laurea Triennale in Scienze Naturali.
28/01/2013

COGNOME e NOME

N. MATRICOLA.....

Prima di uscire dall'aula, **CONSEGNARE QUESTI FOGLI** indipendentemente dall'esito della prova. Nel caso ci si voglia ritirare si barri la casella "Ritirato".

Ritirato

Esercizio 1 (Matematica)

Dare la definizione di funzione debolmente decrescente, per una funzione f da \mathbb{R} in \mathbb{R} .

f è debolmente decrescente se e solo se

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Esercizio 2 (Matematica)

Indicare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema di disequazioni.

$$\begin{cases} |x| - 5 < 0 \\ x^3 \geq 0 \end{cases} \quad [0, 5)$$

Esercizio 3 (Matematica)

Sul piano cartesiano siano $A = (1, 1)$, e $B = (2, 0)$, sia γ la parabola ($y = ax^2 + bx + c$) passante per A , B e per l'origine O , sia r la retta passante per A e O e sia infine s la retta parallela ad r e passante per B .

(a) Calcolare l'equazione della parabola γ .

$$y = 2x - x^2$$

(b) Calcolare l'equazione della retta r .

$$y = x$$

(c) Calcolare l'equazione della retta s .

$$y = x - 2$$

(d) Calcolare i punti di intersezione B e C tra γ e s .

$$B = (2, 0) \quad C = (-1, 3)$$

Esercizio 4 (Matematica)

Calcolare i seguenti limiti:

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 + 3x} - \sqrt{x^3 - 3x} = 0$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x) + 2}{\cos(x) + 2} = \text{N.E.}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x + x^2)^{\frac{5}{\sin(x)}} = 2^5$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\tan(4x)} = -\infty$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos(x) + \sin(x) + \tan(x)}{1 + \cos(x)} = 1$$

Esercizio 5 (Matematica)

Calcolare la derivata della seguente funzione:

$$(a) \quad f(x) = \frac{e^{4x}}{\log(x)} \quad \frac{d}{dx} f(x) = \frac{(4 \times \log(x) - 1) e^{4x}}{x \log^2(x)}$$

Esercizio 6 (Matematica)

Indicare (se vi sono) i punti di non derivabilità delle seguente funzione

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} -\cos(x) & x < -\pi \\ \cos(x) & -\pi \leq x < 0 \\ 5x^2 + 1 & 0 \leq x < 1 \\ 16 - 10x & x \geq 1 \end{cases}$$

$-\pi$

1

Esercizio 7 (Matematica)

Trovare l'equazione della retta tangente ad f in x_0 . ($r: y = mx + q$)

$$(a) \quad f(x) = 3e^{-2x} \quad x_0 = 1 \quad m = -6e^{-2}, q = 9e^{-2}$$

Esercizio 8 (Matematica)

Calcolare la seguente serie.

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{3}$$

Esercizio 9 (Matematica)

Studiare la seguente funzione.

(a) Dominio. (b) Periodicità. (c) Simmetrie. (d) Calcolo derivata prima. (e) Calcolo derivata seconda. (f) Massimi e minimi relativi ed assoluti. (g) Concavità e convessità. (h) Asintoti orizzontali, verticali e obliqui. (i) Tracciarne il grafico.

$$f(x) = \frac{x^2 + 2 - 2x}{2(1-x)}$$

(a) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

(b) Non Periodica

(c) Né pari né dispari

(d) $f'(x) = \frac{2x - x^2}{2(1-x)^2}$

(e) $f''(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$

(f) $f'(x) > 0$ se $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$

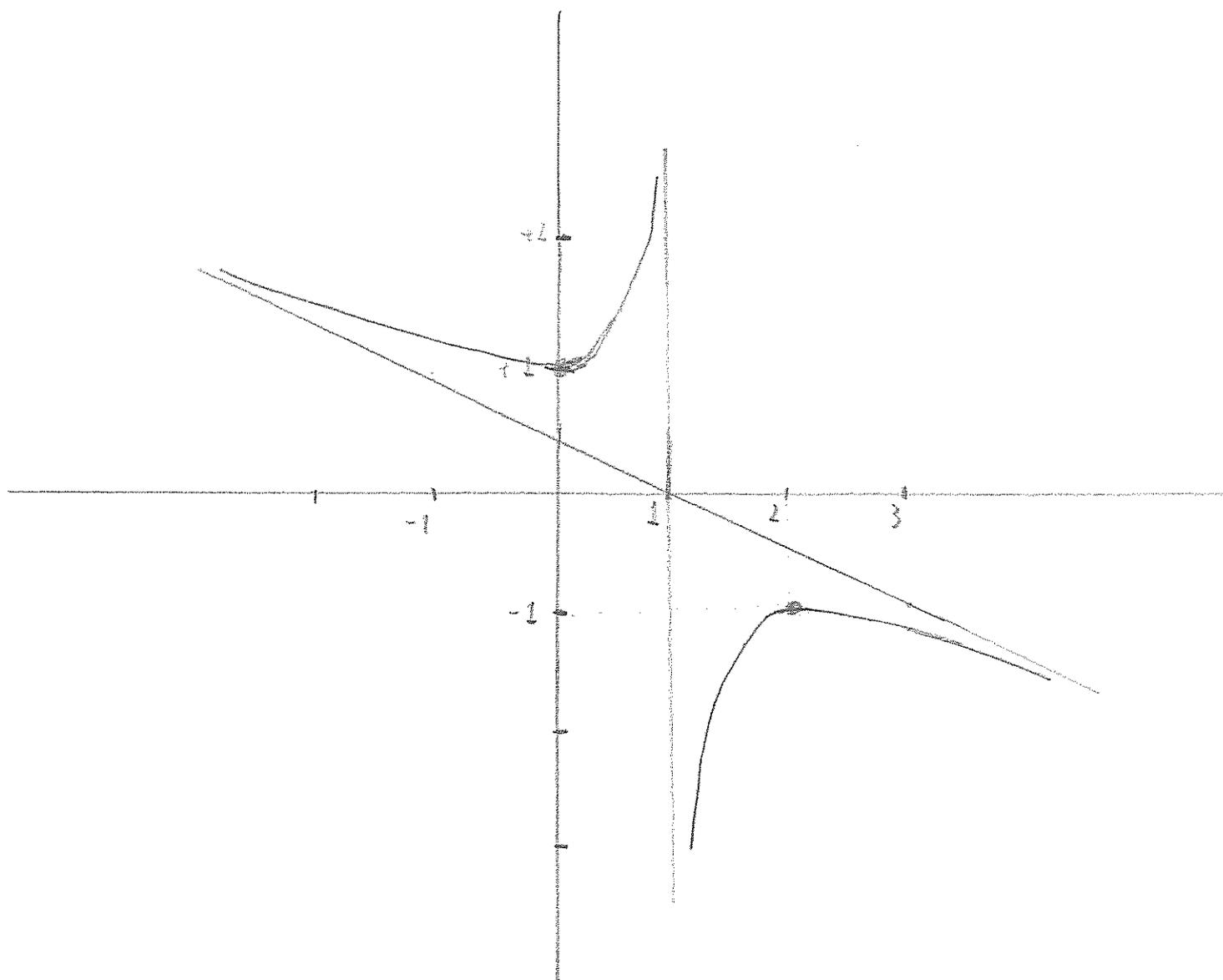
$f'(x) = 0$ se $x \in \{0, 2\}$

$f'(x) < 0$ se $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Punto di minimo relativo $x_1 = 0$, $f(x_1) = +1$
Punto di massimo relativo $x_2 = 2$, $f(x_2) = -1$

(g) f é convexa em $(-\infty, 1)$
 f é côncava em $(1, +\infty)$

(h) Assíntota vertical esquerda $x \rightarrow +\infty$ em $x_0 = 1$
Assíntota vertical direita $x \rightarrow -\infty$ em $x_0 = 1$
Assíntota oblíqua $x \rightarrow +\infty - \infty$ $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$



Esercizio 10 (Matematica)

Risolvere i seguenti integrali.

$$(a) \quad \int (\sin(4x) - e^{4x}) dx = \boxed{-\frac{\cos(4x)}{4} - \frac{e^{4x}}{4} + C}$$

$$(b) \quad \int_0^\pi \sin(5t) dt = \boxed{\frac{2}{5}}$$

$$(c) \quad \int x e^{2x} dx = \boxed{\frac{x}{2} e^{2x} - \frac{e^{2x}}{4} + C}$$

$$(d) \quad \int_0^\infty e^{-3x} dx = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Esercizio 11 (Matematica)

Calcolare il prodotto scalare ed il prodotto vettoriale tra i vettori u e v .

$$u = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$(a) \quad \langle u, v \rangle = \boxed{4} \quad (b) \quad u \wedge v = \begin{pmatrix} 3 \\ -31 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Esercizio 12 (Matematica)

Risolvere le seguenti eq. differenziali.

$$(a) \quad \begin{cases} \dot{y}(t) = 5e^{-5t} \\ y(0) = 5 \end{cases} \quad y(t) = \boxed{-e^{-5t} + 6}$$

$$(b) \quad \begin{cases} \dot{y}(t) = t e^{-5y(t)} \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad y(t) = \boxed{\frac{1}{5} \log\left(\frac{5}{2} t^2 + e^5\right)}$$