

Prova d'esame di  
**Matematica con Elementi di Statistica**  
Laurea Triennale in Scienze Naturali.  
18/02/2013

**COGNOME e NOME** .....

**N. MATRICOLA**.....

Prima di uscire dall'aula, **CONSEGNARE QUESTI FOGLI** indipendentemente dall'esito della prova. Nel caso ci si voglia ritirare si barri la casella "Ritirato".

Ritirato

### Esercizio 1 (Statistica)

Tre amici devono scegliere chi esca a prendere le pizze. Per decidere chi lo farà, mettono in un cappello tre carte da gioco (un due, un tre e un quattro), pescano una carta a testa e chi trova il due andrà a prendere le pizze.

1. Quanto vale la probabilità che il primo che estrae la carta peschi il due?

2. Sapendo che il primo non ha pescato il due, quanto vale la probabilità che il secondo lo peschi?

3. Quanto vale la probabilità che il secondo vada a a prendere le pizze?

4. Sapendo che il primo e il secondo non hanno pescato il due, quanto vale la probabilità che il terzo lo peschi?

5. Quanto vale la probabilità che il terzo vada a a prendere le pizze?

6. Sapendo che il secondo non ha pescato il due, quanto vale la probabilità che il primo lo abbia pescato?

7. Sapendo che il secondo non ha pescato il due, quanto vale la probabilità che il terzo lo abbia pescato?

### Esercizio 2 (Statistica)

Il peso dei salmoni adulti Chinook presenti in un fiume canadese si distribuisce con legge normale di media  $\mu$  e deviazione standard  $\sigma$ , ignoti. Gli abitanti del luogo ci dicono che i salmoni presenti in quel fiume in media non superano i 14 chilogrammi di peso, ma noi pensiamo che in realtà ci stiano mentendo. Supponiamo di aver pescato quest'anno 10 salmoni adulti, i cui pesi (in chilogrammi) sono:

16.1, 15.2, 14.7, 16.3, 17.2, 14.8, 13.7, 12.9, 13.2, 15.9 .

1. Si determini una stima puntuale della media della distribuzione ignota;

2. Si determini una stima puntuale della deviazione standard della distribuzione ignota;

3. Si consideri un test bilaterale per la media del peso, la cui ipotesi nulla sia  $\mu = 14$ , e si verifichi se questa viene rifiutata sulla scorta dei nostri dati con un livello di significatività pari al 5%.

4. Supponendo ora che la deviazione standard del peso dei salmoni sia nota e pari a 1.5 Kg, si consideri un test unilaterale per la media del peso, la cui ipotesi nulla sia  $\mu \leq 14$ , e si verifichi se questa viene rifiutata sulla scorta dei nostri dati con un livello di significatività pari all'1%.

5. Quanto vale il p-value di questo secondo test?

**Esercizio 1 (Matematica)**

Dare la definizione di limite destro in  $x_0$ , per una funzione  $f$  da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ .

**Esercizio 2 (Matematica)**

Indicare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema di disequazioni.

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \leq 0 \\ 2x - x^2 < 0 \end{cases} \quad \boxed{\phantom{000000}}$$

**Esercizio 3 (Matematica)**

Sul piano cartesiano sia  $A$  il punto  $A = (6, 0)$ , sia  $r$  la retta di equazione  $y = 2x - 2$ , sia  $s$  la retta passante per  $A$  e perpendicolare a  $r$ , sia  $B$  il punto di intersezione delle rette  $r$  e  $s$ , sia  $M$  il punto medio del segmento  $\overline{AB}$  e sia infine  $\theta$  l'angolo  $\widehat{AOB}$

(a) Calcolare l'equazione della retta  $s$ .  $y = \boxed{\phantom{000000}}$

(b) Calcolare le coordinate del punto  $B$ .  $B = \boxed{\phantom{000000}}$

(c) Calcolare le coordinate del punto  $M$ .  $M = \boxed{\phantom{000000}}$

(d) Calcolare il coseno dell'angolo  $\theta$ .  $\cos(\theta) = \boxed{\phantom{000000}}$

**Esercizio 4 (Matematica)**

Calcolare i seguenti limiti:

(a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - x^3}{x^2 + 1} = \boxed{\phantom{000000}}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[2]{x^3} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x^5} + \sqrt[5]{x^4}} = \boxed{\phantom{000000}}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \cdot (1 - \cos(x))}{x \cdot \tan^2(x)} = \boxed{\phantom{000000}}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \log(1 + x))^{\frac{1}{x + \sin(x)}} = \boxed{\phantom{000000}}$

(e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \boxed{\phantom{000000}}$

**Esercizio 5 (Matematica)**

Calcolare la derivata della seguente funzione:

$$(a) \quad f(x) = \log(e^{x^2} + 2) \quad \frac{d}{dx} f(x) = \boxed{\phantom{000000}}$$

**Esercizio 6 (Matematica)**

Indicare (se vi sono) i punti di non derivabilità delle seguente funzione

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} \log(2-x) & x < -1 \\ e^{x^2+1} & -1 \leq x < 0 \\ \cos(x) & 0 \leq x < \pi \\ -\cos^2(x) & x \geq \pi \end{cases}$$

              

**Esercizio 7 (Matematica)**Trovare l'equazione della retta tangente ad  $f$  in  $x_0$ . ( $r : y = mx + q$ )

$$(a) \quad f(x) = \sin(5x) \quad x_0 = \frac{\pi}{4} \quad \boxed{m = \phantom{00}, q = \phantom{00}}$$

**Esercizio 8 (Matematica)**

Calcolare la seguente serie.

$$(a) \quad \sum_{i=120}^{180} i = \boxed{\phantom{000000}}$$

### Esercizio 9 (Matematica)

Studiare la seguente funzione.

(a) Dominio. (b) Periodicità. (c) Simmetrie. (d) Calcolo derivata prima. (e) Quanto vale la derivata sinistra di  $f$  in  $x_0 = \pi$ ? (f) Insieme dei punti di derivabilità. (g) Calcolo derivata seconda. (h) Massimi e minimi relativi ed assoluti. (i) Assumiamo come noto che sull'intervallo  $(-\pi, \pi)$  la funzione  $f$  sia concava. Tracciare il grafico della funzione  $y = f(x)$  nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ .

$$f(x) = \sqrt{1 + \cos(x)}$$



**Esercizio 10 (Matematica)**

Risolvere i seguenti integrali.

$$(a) \quad \int \frac{1}{x+2} dx = \boxed{\phantom{000}}$$

$$(b) \quad \int_{-2}^2 3t^2 + 2t^3 dt = \boxed{\phantom{000}}$$

$$(c) \quad \int x^3 \log(x) dx = \boxed{\phantom{000}}$$

$$(d) \quad \int_1^2 \frac{1}{2x+1} dx = \boxed{\phantom{000}}$$

**Esercizio 11 (Matematica)**

Date le Matrici  $A$  e  $B$  calcolarne il prodotto  $A \cdot B$  e il determinante di  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(a) \quad A \cdot B = \boxed{\phantom{000}}$$

$$(b) \quad \det(A) = \boxed{\phantom{000}}$$

**Esercizio 12 (Matematica)**

Risolvere le seguenti eq. differenziali.

$$(a) \quad \begin{cases} \ddot{y}(t) = 2y(t) \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 6\sqrt{2} \end{cases} \quad y(t) = \boxed{\phantom{000}}$$

$$(b) \quad \begin{cases} \ddot{y}(t) = -4\pi^2 y(t) \\ y(0) = 1 \\ y\left(\frac{3}{4}\right) = -\sqrt{2} \end{cases} \quad y(t) = \boxed{\phantom{000}}$$