Prova d'esame di

Matematica con Elementi di Statistica

Laurea Triennale in Scienze Naturali.

18/02/2013

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA...

Prima di uscire dall'aula, **CONSEGNARE QUESTI FOGLI** indipendentemente dall'esito della prova. Nel caso ci si voglia ritirare si barri la casella "Ritirato".

Ritirato ☐

Esercizio 1 (Statistica)
Tre amici devono scegliere chi esca a prendere le pizze. Per decidere chi lo farà, mettono in un cappello tre carte da gioco (un due, un tre e un quattro), pescano una carta a testa e chi trova il due andrà a prendere le pizze.

1. Quanto vale la probabilità che il primo che estrae la carta peschi il due?

   $\boxed{1/3}$

2. Sapendo che il primo non ha pescato il due, quanto vale la probabilità che il secondo lo peschi?

   $\boxed{1/2}$

3. Quanto vale la probabilità che il secondo vada a a prendere le pizze?

   $\boxed{1/3}$

4. Sapendo che il primo e il secondo non hanno pescato il due, quanto vale la probabilità che il terzo lo peschi?

   $\boxed{1}$

5. Quanto vale la probabilità che il terzo vada a a prendere le pizze?

   $\boxed{1/3}$

6. Sapendo che il secondo non ha pescato il due, quanto vale la probabilità che il primo lo abbia pescato?

   $\boxed{1/2}$

7. Sapendo che il secondo non ha pescato il due, quanto vale la probabilità che il terzo lo abbia pescato?

   $\boxed{1/2}$

Esercizio 2 (Statistica)

Il peso dei salmoni adulti Chinook presenti in un fiume canadese si distribuisce con legge normale di media μ e deviazione standard σ, ignoti. Gli abitanti del luogo ci dicono che i salmoni presenti in quel fiume in media non superano i 14 chilogrammi di peso, ma noi pensiamo che in realtà ci stiano mentendo. Supponiamo di aver pescato quest'anno 10 salmoni adulti, i cui pesi (in chilogrammi) sono:

$$16.1, 15.2, 14.7, 16.3, 17.2, 14.8, 13.7, 12.9, 13.2, 15.9 \ .$$

1. Si determini una stima puntuale della media della distribuzione ignota;

$\boxed{15}$

2. Si determini una stima puntuale della deviazione standard della distribuzione ignota;

$\boxed{1.41}$

3. Si consideri un test bilaterale per la media del peso, la cui ipotesi nulla sia $\mu = 14$, e si verifichi se questa viene rifiutata sulla scorta dei nostri dati con un livello di significatività pari al 5%.

$T = 2.242$

$t_{9,\,0.025} = 2.262$

NO!

4. Supponendo ora che la deviazione standard del peso dei salmoni sia nota e pari a 1.5 Kg, si consideri un test unilaterale per la media del peso, la cui ipotesi nulla sia $\mu \leq 14$, e si verifichi se questa viene rifiutata sulla scorta dei nostri dati con un livello di significatività pari all'1%.

$Z = 2.108$

$z_{0.01} = 2.33$

NO!

5. Quanto vale il p-value di questo secondo test?

p-value $= 0.014$

Esercizio 1 (Matematica)
Dare la definizione di limite destro in x_0, per una funzione f da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Si dice che il limite destro per x che tende a x_0 di f è uguale a $\ell \in \mathbb{R}$ se $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ tale che $\forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta)$ vale $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

Esercizio 2 (Matematica)
Indicare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema di disequazioni.

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \leq 0 \\ 2x - x^2 < 0 \end{cases} \qquad \boxed{(2, 3]}$$

Esercizio 3 (Matematica)
Sul piano cartesiano sia A il punto $A = (6, 0)$, sia r la retta di equazione $y = 2x - 2$, sia s la retta passante per A e perpendicolare a r, sia M il punto medio del segmento $\overline{AB}$ e sie infine θ l'angolo $\widehat{AOB}$. SIA B PUNTO DI INTERSEZIONE DELLE RETTE r e s

(a) Calcolare l'equazione della retta s. $\boxed{y = -\frac{1}{2}x + 3}$

(b) Calcolare le coordiante del punto B. $\boxed{B = (2, 2)}$

(c) Calcolare le coordiante del punto M. $\boxed{M = (4, 1)}$

(d) Calcolare il coseno dell'angolo θ. $\boxed{\cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

Esercizio 4 (Matematica)
Calcolare i seguenti limiti:

$$(a) \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x - x^3}{x^2 + 1} = \boxed{-\infty}$$

$$(b) \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[2]{x^3} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x^5} + \sqrt[5]{x^4}} = \boxed{+\infty}$$

$$(c) \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) \cdot (1 - \cos(x))}{x \cdot \tan^2(x)} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$(d) \quad \lim_{x \to 0} (1 + \log(1 + x))^{\frac{1}{x + \sin(x)}} = \boxed{e^{\frac{1}{2}}}$$

$$(e) \quad \lim_{x \to +\infty} \sin(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \boxed{0}$$

Esercizio 5 (Matematica)
Calcolare la derivata della seguente funzione:

(a) $f(x) = \log(e^{x^2} + 2)$ $\qquad \frac{d}{dx} f(x) = \boxed{\frac{2x\, e^{x^2}}{e^{x^2} + 2}}$

Esercizio 6 (Matematica)
Indicare (se vi sono) i punti di non derivabilità delle seguente funzione

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} \log(2-x) & x < -1 \\ e^{x^2+1} & -1 \le x < 0 \\ \cos(x) & 0 \le x < \pi \\ -\cos^2(x) & x \ge \pi \end{cases}$$

$\boxed{-1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$

Esercizio 7 (Matematica)
Trovare l'equazione della retta tangente ad f in x_0.($r: \ y = mx + q$)

(a) $f(x) = \sin(5x)$ $\qquad x_0 = \frac{\pi}{4}$ $\qquad \boxed{m = 5\frac{\sqrt{2}}{2} \quad , q = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{5}{4}\pi - 1\right)}$

Esercizio 8 (Matematica)
Calcolare la seguente serie.

$$(a) \quad \sum_{i=120}^{180} i = \boxed{9150}$$

Esercizio 9 (Matematica)
Studiare la seguente funzione.
(a) Dominio. (b) Periodicità. (c) Simmetrie. (d) Calcolo derivata prima. (e) Quanto vale la derivata sinistra di f in $x_0 = \pi$? (f) Insieme dei punti di derivabilità. (g) Calcolo derivata seconda. (h) Massimi e minimi relativi ed assoluti. (i) Assumiamo come noto che sull'intervallo $(-\pi, \pi)$ la funzione f sia concava. Tracciare il grafico della funzione $y = f(x)$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

$$f(x) = \sqrt{1+\cos(x)} = \sqrt{2}\ \left|\cos\frac{x}{2}\right|$$

(a) $D = \mathbb{R}$

(b) Periodicità $T = 2\pi$

(c) Pari

(d) $f'(x) = -\dfrac{\sin x}{2\sqrt{1+\cos x}} \quad \forall\, x \notin \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} -\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to\pi^-}\sqrt{\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}} =$

$\displaystyle = -\frac{1}{2}\lim_{x\to\pi^-}\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to\pi^-}\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x}} = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

(f) f è derivabile $\forall\, x \notin \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

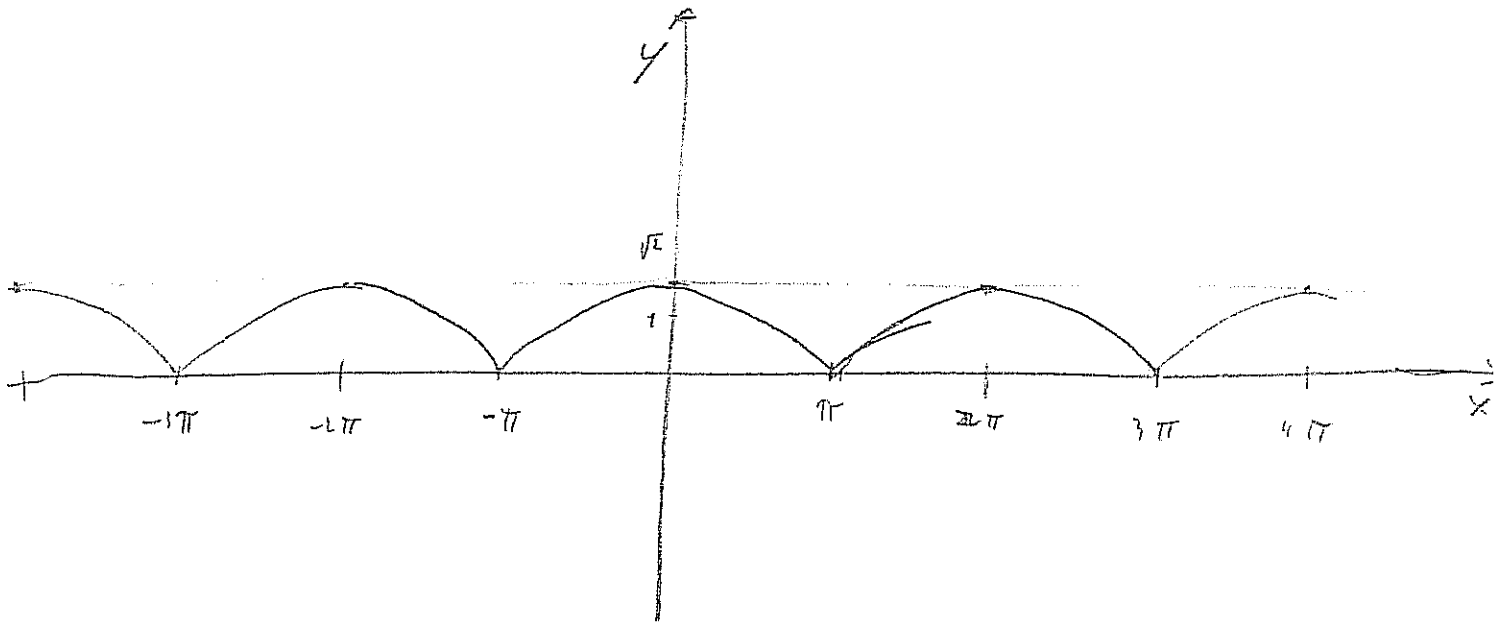
infatti $\displaystyle\lim_{x\to\pi^+} -\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}} = \lim_{x\to\pi^+}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}} =$

$= +\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(g) $f''(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{1+\cos x} \qquad \forall x \notin \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

(h) Massimi assoluti $\{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

Minimi assoluti $\{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$



Esercizio 10 (Matematica)
Risolvere i seguenti integrali.

$$(a) \qquad \int \frac{1}{x+2}\, dx = \boxed{\lg|x+2| + c}$$

$$(b) \qquad \int_{-2}^{2} 3t^2 + 2t^3\, dt = \boxed{16}$$

$$(c) \qquad \int x^3 \log(x)\, dx = \boxed{\frac{x^4}{16}(4 \lg x - 1) + c}$$

$$(d) \qquad \int_1^2 \frac{1}{2x+1}\, dx = \boxed{\frac{\lg 5 - \lg 3}{2} = \frac{1}{2} \lg} \frac{5}{3}$$

Esercizio 11 (Matematica)
Date le Matrici A e B calcolarne il prodotto $A \cdot B$ e il determinante di A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(a) \quad A \cdot B = \boxed{\begin{matrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 5 & 5 & 1 \end{matrix}} \qquad (b) \quad \det(A) = \boxed{8}$$

Esercizio 12 (Matematica)
Risolvere le seguenti eq. differenziali.

$$(a) \quad \begin{cases} \ddot{y}(t) = 2y(t) \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 6\sqrt{2} \end{cases} \qquad \boxed{y(t) = 3e^{\sqrt{2}t} - 3e^{-\sqrt{2}t}}$$

$$(b) \quad \begin{cases} \ddot{y}(t) = -4\pi^2 y(t) \\ y(0) = 1 \\ y\left(\frac{3}{4}\right) = -\sqrt{2} \end{cases} \qquad \boxed{y(t) = \sqrt{2}\sin(2\pi t) +} \cos(2\pi t)$$