

Prova d'esame di  
**Matematica con Elementi di Statistica**  
Laurea Triennale in Scienze Naturali.  
30/08/2013

**COGNOME e NOME** .....

**N. MATRICOLA**.....

Prima di uscire dall'aula, **CONSEGNARE QUESTI FOGLI** indipendentemente dall'esito della prova. Nel caso ci si voglia ritirare si barri la casella "Ritirato".

Ritirato

### Esercizio 1 (Statistica)

Prendiamo un mazzo di 52 carte da gioco (4 assi, 4 due, ...), lo mescoliamo ed estraiamo a caso una carta. La mettiamo quindi da parte ed estraiamo a caso una seconda carta.

1. Quanto vale la probabilità che la prima carta sia l'asso di picche?

2. Quanto vale la probabilità che la prima carta sia un asso?

3. Quanto vale la probabilità che la seconda carta sia un asso?

4. Quanto vale la probabilità che almeno una delle due carte sia un asso?

5. Sapendo che la seconda carta è un asso, qual è la probabilità che la prima fosse anch'essa un asso?

### Esercizio 2 (Statistica)

Il numero dei clienti di una tabaccheria che in una mattina comprano un Gratta e Vinci si distribuisce con legge normale di media  $\mu$  e varianza  $\sigma^2$ , ignoti. In 15 mattinate scelte a caso si sono osservati i seguenti numeri di acquisti

100, 97, 85, 109, 101, 83, 88, 97, 92, 102, 100, 89, 79, 82, 121 .

1. Si determini una stima puntuale della media della distribuzione ignota;

2. Si determini una stima puntuale della deviazione standard della distribuzione ignota;

3. Si consideri un test bilaterale per la media dei Gratta e Vinci venduti, la cui ipotesi nulla sia  $\mu = 92$ , e si verifichi se questa viene rifiutata sulla scorta dei nostri dati con un livello di significatività pari al 5%.

4. Supponendo ora che la deviazione standard del numero di Gratta e Vinci venduti sia nota e pari a 10, si consideri un test unilaterale per la media, la cui ipotesi nulla sia  $\mu \leq 92$ , si verifichi se questa viene rifiutata sulla scorta dei nostri dati con un livello di significatività pari all'1% e se ne determini il p-value.

**Esercizio 1 (Matematica)**

Scrivere la formula di integrazione per parti.

**Esercizio 2 (Matematica)**

Indicare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema di disequazioni.

$$\begin{cases} |x| < 10 \\ x^2 \geq 10x \end{cases} \quad \boxed{\phantom{000000}}$$

**Esercizio 3 (Matematica)**

Sul piano cartesiano siano  $A = (0, 4)$ , e  $B = (5, -1)$ , sia  $C$  il punto del piano equidistante dai punti  $A$ ,  $B$  e dall'origine  $O$ , sia  $r$  la retta passante per  $A$  e  $B$ , sia  $s$  la retta passante per  $C$  e perpendicolare a  $r$ , sia infine  $D$  il punto di intersezione tra la retta  $s$  e l'asse dell  $y$ .

(a) Calcolare le coordinate del punto  $C$ .

$C =$

(b) Calcolare l'equazione della retta  $r$ .

$y =$

(c) Calcolare l'equazione della retta  $s$ .

$y =$

(d) Calcolare le coordinate del punto  $D$ .

$D =$

**Esercizio 4 (Matematica)**

Calcolare i seguenti limiti:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{7-x}{x^2-5x-14} =$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^5} + \sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[4]{x^3}} =$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin(x))}{2x} =$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{\frac{1}{x}} =$

(e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2} =$

**Esercizio 5 (Matematica)**

Calcolare la derivata della seguente funzione:

$$(a) \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x) + 2} \quad \frac{d}{dx}f(x) = \boxed{\phantom{000000}}$$

**Esercizio 6 (Matematica)**

Indicare (se vi sono) i punti di non derivabilità delle seguente funzione

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < -1 \\ x + 1 & -1 \leq x < 0 \\ \cos(x) & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} - x & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

          

**Esercizio 7 (Matematica)**

Trovare l'equazione della retta tangente ad  $f$  in  $x_0$ . ( $r : y = mx + q$ )

$$(a) \quad f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}e^{x-1}\right) \quad x_0 = 1 \quad \boxed{m = \phantom{000}, q = \phantom{000}}$$

**Esercizio 8 (Matematica)**

Calcolare la seguente serie.

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n = \boxed{\phantom{000000}}$$

### Esercizio 9 (Matematica)

Studiare la seguente funzione.

(a) Dominio. (b) Periodicità. (c) Simmetrie. (d) Calcolo derivata prima. (e) Calcolo derivata seconda. (f) Massimi e minimi relativi ed assoluti. (g) Concavità e convessità. (h) Asintoti orizzontali, verticali e obliqui. (i) Tracciarne il grafico nell'intervallo  $[-2\pi, +2\pi]$ .

$$f(x) = 2 \sin(x) - x$$



**Esercizio 10 (Matematica)**

Risolvere i seguenti integrali.

$$(a) \quad \int \left( -\frac{x^2}{2} + \sin(x) \right) dx = \boxed{\phantom{000000}}$$

$$(b) \quad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(t)} dt = \boxed{\phantom{000000}}$$

$$(c) \quad \int \log(\sqrt{x}) dx = \boxed{\phantom{000000}}$$

$$(d) \quad \int_1^2 e^x + e^{2x} dx = \boxed{\phantom{000000}}$$

**Esercizio 11 (Matematica)**

Date le matrici  $A$  e  $B$  calcolare  $A \cdot B$  e  $B \cdot A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(a) \quad A \cdot B = \boxed{\phantom{000000}}$$

$$(a) \quad B \cdot A = \boxed{\phantom{000000}}$$

**Esercizio 12 (Matematica)**

Risolvere le seguenti eq. differenziali.

$$(a) \quad \begin{cases} \dot{y}(t) = -4y(t) \\ y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = -2 \end{cases} \quad y(t) = \boxed{\phantom{000000}}$$

$$(b) \quad \begin{cases} \dot{y}(t) = -y(t) + 2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad y(t) = \boxed{\phantom{000000}}$$