

Prova d'esame di  
**Matematica con Elementi di Statistica**  
Laurea Triennale in Scienze Naturali.  
18/09/2013

**COGNOME e NOME** .....

**N. MATRICOLA**.....

Prima di uscire dall'aula, **CONSEGNARE QUESTI FOGLI** indipendentemente dall'esito della prova. Nel caso ci si voglia ritirare si barri la casella "Ritirato".

Ritirato

### Esercizio 1 (Statistica)

Prendiamo un mazzo di 52 carte da gioco (4 assi, 4 due, ...), lo mescoliamo ed estraiamo a caso due carte in blocco. Le mettiamo quindi da parte ed estraiamo a caso una terza carta.

1. Quanto vale la probabilità che le prime due carte siano degli assi?

2. Sapendo che le prime due carte non sono degli assi, quanto vale la probabilità che la terza carta sia un asso?

3. Quanto vale la probabilità che la terza carta sia un asso?

4. Sapendo che la terza carta è un asso, qual è la probabilità che le prime due fossero anch'esse degli assi?

5. Ha senso che l'ultima probabilità trovata sia minore del valore trovato al passo 1? sapreste spiegarne il motivo?

### Esercizio 2 (Statistica)

Il numero di pazienti che arrivano al pronto soccorso durante un turno di guardia si distribuisce con legge normale di media  $\mu$  e varianza  $\sigma^2$ , ignoti. In 15 turni scelti a caso si sono osservati i seguenti numeri di arrivi

82, 100, 85, 101, 97, 83, 88, 109, 92, 102, 97, 89, 79, 100, 121 .

1. Si determini una stima puntuale della media della distribuzione ignota;

2. Si determini una stima puntuale della deviazione standard della distribuzione ignota;

3. Si consideri un test bilaterale per la media degli arrivi, la cui ipotesi nulla sia  $\mu = 92$ , e si verifichi se questa viene rifiutata sulla scorta dei nostri dati con un livello di significatività pari al 5%.

4. Supponendo ora che la deviazione standard del numero di arrivi sia nota e pari a 10, si consideri un test unilaterale per la media, la cui ipotesi nulla sia  $\mu \leq 92$ , si verifichi se questa viene rifiutata sulla scorta dei nostri dati con un livello di significatività pari all'1% e se ne determini il p-value.

**Esercizio 1 (Matematica)**

Dare la definizione di funzione periodica, per una funzione  $f$  da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ .

**Esercizio 2 (Matematica)**

Indicare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema di disequazioni.

$$\frac{x+1}{x-3} \geq 0 \quad \boxed{\phantom{000000}}$$

**Esercizio 3 (Matematica)**

Sul piano cartesiano siano  $A = (4, 0)$  e  $B = (-2, 3)$ , sia  $\gamma$  la parabola ( $y = ax^2 + bx + c$ ) passante per  $A$ ,  $B$  e per l'origine  $O$ , sia  $\theta$  l'angolo  $\widehat{AOB}$ , sia  $r$  la retta passante per  $B$  e parallela all'asse delle  $x$  e sia infine  $C$  il secondo punto di intersezione (oltre  $B$ ) tra  $r$  e  $\gamma$ .

- (a) Calcolare l'equazione della parabola  $\gamma$ .  $y =$
- (b) Calcolare il coseno dell'angolo  $\theta$ .  $\cos(\theta) =$
- (c) Calcolare l'equazione della retta  $r$ .  $y =$
- (d) Calcolare le coordinate del punto  $C$ .  $C =$

**Esercizio 4 (Matematica)**

Calcolare i seguenti limiti:

(a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} =$

(b)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{-x}}{\sqrt{2-x} - \sqrt{5}} =$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(e^x-1)} - 1}{x} =$

(d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{3x+1}{2}} =$

(e)  $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \sin\left(\frac{1}{x-\pi}\right) =$

**Esercizio 5 (Matematica)**

Calcolare la derivata della seguente funzione:

$$(a) \quad f(x) = \sqrt{\sin(x^2) + 1} \quad \frac{d}{dx}f(x) = \boxed{\phantom{000000}}$$

**Esercizio 6 (Matematica)**

Indicare (se vi sono) i punti di non derivabilità delle seguente funzione

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ e^x - 1 & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x^2}{2} & 1 \leq x < 2 \\ 2x & x \geq 2 \end{cases}$$

          

**Esercizio 7 (Matematica)**

Trovare l'equazione della retta tangente ad  $f$  in  $x_0$ . ( $r : y = mx + q$ )

$$(a) \quad f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4}x\right) - 1 \quad x_0 = 1 \quad \boxed{m = \phantom{00}, q = \phantom{00}}$$

**Esercizio 8 (Matematica)**

Calcolare la seguente serie.

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \boxed{\phantom{000000}}$$

### Esercizio 9 (Matematica)

Studiare la seguente funzione.

- (a) Dominio. (b) Periodicità. (c) Simmetrie. (d) Calcolo derivata prima. (e) Calcolo derivata seconda. (f) Massimi e minimi relativi ed assoluti. (g) Concavità e convessità. (h) Calcolo retta tangente in  $x_0 = 1$ . (i) Asintoti orizzontali, verticali e obliqui.  
(l) Tracciarne un grafico approssimativo

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$



**Esercizio 10 (Matematica)**

Risolvere i seguenti integrali.

$$(a) \quad \int \left( \frac{1}{x} + \sin(2x) \right) dx = \boxed{\phantom{000000}}$$

$$(b) \quad \int_{2\pi}^{3\pi} \left( \cos\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{3}\right) \right) dt = \boxed{\phantom{000000}}$$

$$(c) \quad \int e^{\sqrt{x}} dx = \boxed{\phantom{000000}}$$

$$(d) \quad \int_0^1 x e^x dx = \boxed{\phantom{000000}}$$

**Esercizio 11 (Matematica)**Dati il vettore  $v$  e la matrice  $A$  calcolare il prodotto  $Av$  e il determinante di  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(a) \quad Av = \boxed{\phantom{000000}}$$

$$(b) \quad \det(A) = \boxed{\phantom{000000}}$$

**Esercizio 12 (Matematica)**

Risolvere le seguenti eq. differenziali.

$$(a) \quad \begin{cases} \dot{y}(t) = -4y(t) \\ y(0) = 4 \end{cases} \quad y(t) = \boxed{\phantom{000000}}$$

$$(b) \quad \begin{cases} \ddot{y}(t) = 9y(t) \\ y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = -9 \end{cases} \quad y(t) = \boxed{\phantom{000000}}$$